МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика»

А.А. Федотов, П.В. Храпов

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Электронное учебное издание

Методические указания
к выполнению лабораторных работ
по курсу «Численные методы»

Москва

УДК 518.12

Рецензент: кандидат техн. наук Титов Константин Викторович

Федотов А.А.

Численные методы: Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Численные методы». / А.А. Федотов, П.В. Храпов — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 141 с.: ил.

Рассмотрены численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений, методы решения задач математического анализа: решение систем нелинейных уравнений, приближение функций и численное интегрирование. Изложены методы решения задачи Коши и краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены варианты индивидуальных заданий к лабораторным работам.

Для студентов 2-ого курса факультетов МТ и РК МГТУ им. Н.Э. Баумана. Пособие может быть использовано студентами других факультетов.

Ил. 22. Табл. 17. Библ. 10 назв.

Одобрено Учебно-методической комиссией НУК «Фундаментальные науки» МГТУ им.Н.Э. Баумана

Федотов Анатолий Александрович

Храпов Павел Васильевич

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Методические указания

к выполнению лабораторных работ

по курсу «Численные методы»

Оглавление

Предисловие

Пособие содержит теоретический материал и варианты заданий к лабораторным работам по курсу "Численные методы".

Глава 1 посвящена изучению методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Рассматриваются различные нормированные пространства, вводятся и обсуждаются понятия нормы матрицы, устойчивости системы линейных алгебраических уравнений. Дается алгоритм степенного метода и его применение для нахождения меры обусловленности симметричных матриц. Излагаются метод Гаусса, метод Гаусса с выбором главного элемента, алгоритм LU-разложения, метод квадратного корня, метод прогонки для решения системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, численные методы решения систем нелинейных уравнений: метод простых итераций и метод Ньютона.

В гл. 2 представлены численные методы приближения функций. Рассматривается интерполяционный многочлен Лагранжа, дается оценка его погрешности. Изучаются сплайн-интерполяция и метод наименьших квадратов.

Глава 3 содержит численные методы для приближенного вычисления однократных интегралов, в частности, квадратурные формулы средних прямоугольников, трапеций, Симпсона и формулы Гаусса.

В гл. 4 рассмотрены численные методы вычисления двойных интегралов: метод ячеек и метод последовательного интегрирования.

В гл. 5 излагаются приближенные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Изучается метод Эйлера, приводятся расчетные формулы методов Рунге-Кутта второго и четвертого порядков точности, дается изложение метода Адамса. Обсуждается распространение рассмотренных методов на случай задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В гл. 6 изучаются приближенные методы решения краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка: решение разностной задачи методом прогонки и методом стрельбы.

Список литературы, рекомендуемой для более полного ознакомления с рассмотренными в работе вопросами, приводится в конце пособия.

Для студентов 2-го курса факультетов МТ и РК МГТУ им. Н.Э. Баумана. Пособие может быть использовано студентами других факультетов.

Глава 1

Численные методы алгебры

1.1. Устойчивость системы линейных алгебраических уравнений

1.1.1. Нормированные пространства. Свойства нормы матрицы

Определение. Нормированным пространством называется линейное пространство L, в котором для любого элемента $x \in L$ определён функционал $\|x\|$ (норма) такой, что выполняются условия:

1) $\|x\| \geq 0$, причём $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \ \ \forall \lambda \in R$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \ \forall x, y \in L.$

Пример 1. Рассмотрим пространство R^1. Здесь $\|x\| = |x|$, $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Пример 2. Пусть R_1^n — n-мерное пространство. Здесь . $\|\vec{x}\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Проверим выполнение условия 3:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \|\vec{x}\|_1 + \|\vec{y}\|_1.$$

Пример 3. Пусть R_2^n — n-мерное евклидово пространство,

$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ – евклидова норма.

В общем случае равенство $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ определяет норму в евклидовом пространстве.

Пример 4. Пусть R^n_∞ — n-мерное пространство с нормой $\|\vec{x}\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

Проверим выполнение условия 3 в определении нормированного пространства:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i + y_i| \le \max_{i=1,\ldots,n} (|x_i| + |y_i|) \le$$
$$\max_{i=1,\ldots,n} |x_i| + \max_{i=1,\ldots,n} |y_i| = \|\vec{x}\|_\infty + \|\vec{y}\|_\infty.$$

Пример 5. $C[a,b]$ — пространство непрерывных на $[a,b]$ функций, $\|f(x)\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$ — норма.

Докажем выполнение условия 3 в определении нормированного пространства:

$$\|f+g\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)+g(t)| \le \max_{t\in[a,b]}(|f(t)| + |g(t)|) \le$$
$$\max_{t\in[a,b]} |f(t)| + \max_{t\in[a,b]} |g(t)| = \|f\| + \|g\|.$$

Пример 6. Пусть R^n_p — n-мерное пространство с нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p \ge 1.$$

Пример 7. Рассмотрим пространство квадратных матриц:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Введем норму матрицы:

$$\|A\| = \sup_{x\ne 0} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \sup_{\|\vec{y}\|=1} \|A\vec{y}\|,$$

поскольку

$$\frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \left\|A\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)\right\|, \quad \left\|\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)\right\| = 1.$$

Пример 8. Пусть $A : R_2^2 \to R_2^2$, отображение задаётся матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Параметризуем окружность единичного радиуса:

$$\begin{cases} x_1 = \cos t \\ x_2 = \sin t \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 = 4\cos t \\ y_2 = \sin t \end{cases}.$$

Рис. 1.1 иллюстрирует понятие нормы в двумерном пространстве (здесь а — окружность единичного радиуса, б — ее образ). Из рисунка следует, что $\|A\| = 4$.

В общем случае, если A - симметричная матрица, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – её собственные числа, то евклидова норма $\|A\| = \max\limits_{i=1,...,n} |\lambda_i|$.

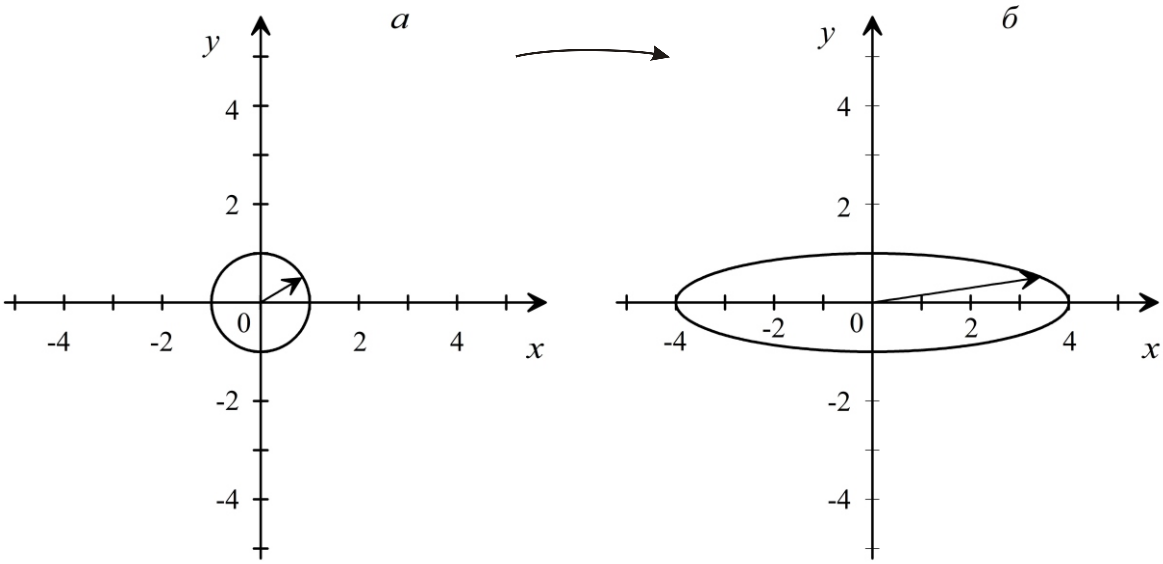

Рис. 1.1.

Рассмотрим *свойства нормы* матрицы:

1) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,

2) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Для доказательства свойств 1 и 2 нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение. Имеет место равенство $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$.

Из определения нормы матрицы

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\|.$$

Отсюда следует утверждение.

Докажем свойства нормы матрицы.

1. Запишем цепочку неравенств

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\|.$$

Поделим все части неравенств на $\|x\|$:

$$\frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \le \|A\| + \|B\| \Rightarrow \|A+B\| \le \|A\| + \|B\|.$$

2. Аналогично

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \le \|A\| \cdot \|Bx\| \le \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|.$$

Осталось поделить все части неравенств на $\|x\|$.

Пример 9. Пусть $A : R^n \to R^n$, $\|\vec{x}\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\|A\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \\
&\le \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, |x_j| \le \max_{i=1,\ldots,n} |x_j| \cdot \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \\
&= \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty \Rightarrow \|A\|_\infty \le \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \,.
\end{aligned}$$

На самом деле

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \,, \qquad \|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \,.$$

Если

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}, \text{то} \quad \|A\|_\infty = 10, \quad \|A\|_1 = 18.$$

1.1.2. Устойчивость системы линейных алгебраических уравнений

Система устойчива, если при небольшом изменении входных данных изменения решения будут небольшими. Пусть

$$A\vec{x} = \vec{f}, \quad \text{где} \quad A = (a_{ij})_{m\times m}.$$

Тогда

$$(A + \delta A)(\vec{x} + \delta\vec{x}) = \vec{f} + \delta\vec{f},$$

где δA – погрешность матрицы коэффициентов A, $\delta\vec{x}$ – погрешность решения $\vec{x}$, $\delta\vec{f}$ – погрешность правой части $\vec{f}$ уравнения.

Если $\delta\vec{f} = 0$, то рассматривают коэффициентную устойчивость. Если $\delta A = 0$, то рассматривают устойчивость по правой части.

Определение. Система линейных алгебраических уравнений устойчива, если существует константа $C > 0$, такая, что $\|\delta\vec{x}\| \le C \cdot \|\delta\vec{f}\|$.

Далее будем предполагать, что $\delta A = 0$, т.е. будем есть рассматривать устойчивость по правой части. Тогда

$$A\delta\vec{x} = \delta\vec{f}, \quad \delta\vec{x} = A^{-1}\delta\vec{f}.$$

Отсюда

$$\frac{\|\delta\vec{x}\|/\|\vec{x}\|}{\|\delta\vec{f}\|/\|\vec{f}\|} = \frac{\|A^{-1}\delta\vec{f}\| \cdot \|A\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\| \cdot \|\delta\vec{f}\|} = \frac{\|A^{-1}\delta\vec{f}\|}{\|\delta\vec{f}\|} \cdot \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \nu(A),$$

где $\nu(A)$ – мера обусловленности матрицы A.

Имеет место неравенство

$$\nu(A) \ge 1.$$

Действительно: $1 = \|E\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \nu(A)$.

Если $\nu(A) \gg 1$, то матрица – плохо обусловлена, т.е. небольшие изменения в правой части системы (норма $\|\delta\vec{f}\|$ мала), могут привести к существенным изменениям решения.

Пример. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0.001 \end{pmatrix}.$$

Ее решение $x_1 = 1, x_2 = 1$. При этом $\|\vec{x}\|_\infty = 1$. Сделаем небольшое (по норме) изменение правой части:

$$\delta f_1 = 0.1, \quad \delta f_2 = 0.1, \quad \|\delta\vec{f}\|_\infty = 0.1.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\delta x_1 = 0.0001, \quad \delta x_2 = 100, \quad \|\delta\vec{x}\|_\infty = 100.$$

При этом

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 1000 \end{pmatrix}, \quad \|A\|_\infty = 1000, \quad \|A^{-1}\|_\infty = 1000,$$

$$\nu(A) = 1000 \cdot 1000 = 1000000.$$

В общем случае имеет место следующая теорема.

Теорема[1]. Если $\|\delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, то

$$\frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \frac{\nu(A)}{1 - \nu(A)\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|\delta\vec{f}\|}{\|\vec{f}\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right).$$

1.1.3. Степенной метод

Степенной метод позволяет найти наибольшее по модулю собственное значение и собственный вектор квадратной матрицы A. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ - собственные числа матрицы A. Для определенности предположим, что $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_m|$. При этом собственному значению λ_i соответствует собственное подпространство (не обязательно одномерное) с базисом $\vec{e}_{i,1}, \vec{e}_{i,2}, ..., \vec{e}_{i,k_i}$. Возьмем произвольный ненулевой вектор $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. Разложим его по базису из собственных векторов $\{\vec{e}_{i,k}\}$, $i = 1, 2, \ldots, m, k = 1, \ldots, k_i$, где k_i - размерность i-го собственного подпространства, соответствующего собственному значению λ_i. Тогда

$$\vec{x}^0 = c_{1,1}\vec{e}_{1,1} + c_{1,2}\vec{e}_{1,2} + ... + c_{1,k_1}\vec{e}_{1,k_1} + c_{2,1}\vec{e}_{2,1} + ...$$
$$... + c_{m,1}\vec{e}_{m,1} + ... + c_{m,k_m}\vec{e}_{m,k_m}.$$

Отсюда следует

$$A\vec{x}^0 = \lambda_1 c_{1,1}\vec{e}_{1,1} + \lambda_1 c_{1,2}\vec{e}_{1,2} + ... + \lambda_1 c_{1,k_1}\vec{e}_{1,k_1} + \lambda_2 c_{2,1}\vec{e}_{2,1} + ...$$
$$... + \lambda_m c_{m,1}\vec{e}_{m,1} + ... + \lambda_m c_{m,k_m}\vec{e}_{m,k_m},$$
$$...,$$
$$A^p\vec{x}^0 = \lambda_1^p c_{1,1}\vec{e}_{1,1} + \lambda_1^p c_{1,2}\vec{e}_{1,2} + ... + \lambda_1^p c_{1,k_1}\vec{e}_{1,k_1} + \lambda_2^p c_{2,1}\vec{e}_{2,1} + ...$$
$$... + \lambda_m^p c_{m,1}\vec{e}_{m,1} + ... + \lambda_m^p c_{m,k_m}\vec{e}_{m,k_m}.$$

Видно, что при больших p доминирует вклад от базисных векторов, отвечающих наибольшему по модулю собственному значению λ_1. Отсюда получаем алгоритм степенного метода. Строим последовательность векторов:

$$\vec{x}^1 = \frac{A\vec{x}^0}{\|\vec{x}^0\|}, \quad \vec{x}^2 = \frac{A\vec{x}^1}{\|\vec{x}^1\|}, \quad ..., \quad \vec{x}^p = \frac{A\vec{x}^{p-1}}{\|\vec{x}^{p-1}\|}.$$

Критерий окончания процесса $\|\vec{x}^p - \mathrm{sign}(x_i^p x_i^{p-1})\vec{x}^{p-1}\| < \varepsilon$ (выражение $\mathrm{sign}(x_i^p x_i^{p-1})$ следует учитывать, поскольку собственное значение матрицы может быть отрицательным), где точность вычислений ε задана (например, $\varepsilon = 0.000001$). Тогда $\lambda_1 \approx x_i^p / x_i^{p-1} \|\vec{x}^{\,p-1}\|$, где $\vec{x}^{\,p} = (x_1^p, x_2^p, ..., x_n^p)$. Для правильной работы алгоритма важно, чтобы вектор $\vec{x}^{\,0}$ содержал ненулевую проекцию на собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ_1.

1.1.4. Нахождение меры обусловленности симметричной матрицы A степенным методом

Если A — симметричная матрица, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ — собственные числа, то евклидова норма $\|A\| = \max\limits_{1,...,m} |\lambda_i|$.

С помощью степенного метода можно найти и норму $\|A\|^{-1}$. Для этого мы должны построить последовательность

$$\vec{x}^{\,1} = \frac{A^{-1}\vec{x}^{\,0}}{\|\vec{x}^{\,0}\|}, \quad \vec{x}^{\,2} = \frac{A^{-1}\vec{x}^{\,1}}{\|\vec{x}^{\,1}\|}, \quad ..., \quad \vec{x}^{\,p} = \frac{A^{-1}\vec{x}^{\,p-1}}{\|\vec{x}^{\,p-1}\|},$$

или

$$A\vec{x}^{\,1} = \frac{\vec{x}^{\,0}}{\|\vec{x}^{\,0}\|}, \quad A\vec{x}^{\,2} = \frac{\vec{x}^{\,1}}{\|\vec{x}^{\,1}\|}, \quad ..., \quad A\vec{x}^{\,p} = \frac{\vec{x}^{\,p-1}}{\|\vec{x}^{\,p-1}\|}.$$

То есть на каждом шаге для нахождения значения $\vec{x}^{\,i}$ решаем соответствующую систему линейных алгебраических уравнений $A\vec{x}^{\,i} = \vec{x}^{\,i-1}/\|\vec{x}^{\,i-1}\|$. Критерий окончания процесса $\|\vec{x}^{\,p} - \mathrm{sign}(x_i^p x_i^{p-1})\vec{x}^{\,p-1}\| < \varepsilon$, где точность ε задана (в лабораторной работе $\varepsilon = 0.000001$). Тогда $\lambda_1 \approx x_i^p / x_i^{p-1} \|\vec{x}^{\,p-1}\|$ и $\|A^{-1}\| = |\lambda_1|$.

Мера обусловленности матрицы A равна $\nu(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

1.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (далее СЛАУ) вида

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \dots \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix}.$$

Перепишем ее в развернутом виде

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}, \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}, \\ & \dots \\ & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

1.2.1. Прямой ход метода Гаусса

Предположив, что $a_{11} \neq 0$, разделим первое уравнение системы (1.2.1) на a_{11}. Получим

$$x_1 + \sum_{j=2}^{n} a^1_{1j} x_j = a^1_{1,n+1}. \tag{1.2.2}$$

Из каждого из оставшихся уравнений в (1.2.1) $(i = 2, 3, \dots, n)$ вычтем уравнение (1.2.2), умноженное на соответствующий коэффициент a_{i1}. Получим

$$\sum_{j=2}^{n} a^1_{ij} x_j = a^1_{i,n+1}, \quad i = 2, 3, \dots, n. \tag{1.2.3}$$

Предположив, что $a^1_{22} \neq 0$, разделим первое уравнение системы в (1.2.3) на a^1_{22}:

$$x_2 + \sum_{j=3}^{n} a^2_{2j} x_j = a^2_{2,n+1}. \tag{1.2.4}$$

Из каждого из оставшихся уравнений в (1.2.3) ($i = 3, 4, \ldots, n$) вычтем уравнение (1.2.4), умноженное на соответствующий коэффициент a^1_{i2}. Получим

$$\sum_{j=3}^{n} a^2_{ij} x_j = a^2_{i,n+1}, \quad i = 3, 4, \ldots, n. \tag{1.2.5}$$

В результате придем к системе

$$x_i + \sum_{j=i+1}^{n} a^i_{ij} x_j = a^i_{i,n+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2.6}$$

Прямой ход метода Гаусса зазавершен.

1.2.2. Обратный ход метода Гаусса

Из формулы (1.2.6) следует

$$x_i = a^i_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a^i_{ij} x_j, \quad i = n, n-1, n-2, ..., 1. \tag{1.2.7}$$

Количество арифметических операций при использовании метода Гаусса составляет порядка $\mathrm{const} \cdot n^3$.

Для того, чтобы повысить точность вычислений и избежать возможного деления на ноль (см. выше: «Предположив, что $a_{11} \neq 0$...»), используют метод Гаусса с выбором главного элемента.

1.2.3. Метод Гаусса с выбором главного элемента

Пусть на k-ом шаге (при $k = 0$ это исходная система уравнений) получена система уравнений:

$$x_i + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^i x_j = a_{i,n+1}^i, \quad i = 1, 2, \ldots, k;$$
$$\sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}^k x_j = a_{i,n+1}^k, \quad i = k+1, k+2, \ldots, n.$$

Пусть

$$|a_{l,k+1}^k| = \max |a_{i,k+1}^k|, \quad i = k+1, k+2, \ldots, n.$$

Переставляем местами l-ю и $(k+1)$-ю строки. Если при этом $|a_{l,k+1}^k| = 0$, то это означает, что определитель матрицы A равен нулю и система уравнений либо не имеет решений, либо имеет их бесконечно много (теорема Кронекера-Капелли).

Далее продолжаем применять стандартный метод Гаусса, пока не спустимся на ступеньку ниже, после чего повторяем процедуру.

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & 6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 38 \\ 16 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1 шаг. Так как $|a_{31}| = 8 = \max\limits_{i=1,\ldots,4} |a_{i,1}^0| > |a_{11}| = 1$, то переставляем местами первую и третью строки:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 38 \\ 22 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Поделим первую строку на ${a'}^{0}_{11} = 8$ (штрих $'$ обозначает промежуточное значение соответствующего элемента расширенной матрицы $\bar{A}$ на текущем шаге метода Гаусса) и вычтем получившуюся строку из второй, третьей и четвёртой строк, домножив первую строку на ${a'}^{0}_{21} = 3$, ${a'}^{0}_{31} = 1$, ${a'}^{0}_{41} = 6$, соответственно. В результате получим

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{17}{4} & 1 & \frac{31}{4} \\ 0 & \frac{7}{4} & 3 & \frac{17}{4} \\ 0 & \frac{9}{2} & 6 & \frac{21}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 32 \\ 20 \\ 48 \end{pmatrix}.$$

2 шаг. Так как $|a^1_{42}| = \dfrac{9}{2} = \max\limits_{i=2,3,4} |a^1_{i,2}| > |a^1_{22}| = \dfrac{17}{4}$, то переставляем местами вторую и четвертую строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{9}{2} & 6 & \frac{21}{2} \\ 0 & \frac{7}{4} & 3 & \frac{17}{4} \\ 0 & \frac{17}{4} & 1 & \frac{31}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 48 \\ 20 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

Поделим вторую строку на ${a'}^{1}_{22} = \dfrac{9}{2}$ и вычтем получившуюся строку из третьей и четвёртой строк, домножив вторую строку на ${a'}^{1}_{32} = \dfrac{7}{4}$, ${a'}^{1}_{42} = \dfrac{17}{4}$, соответственно. В результате получим

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{14}{3} & -\frac{13}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{32}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{40}{3} \end{pmatrix}.$$

3 шаг. Так как $|a_{43}^2| = \dfrac{14}{3} = \max\limits_{i=3,4} |a_{i,3}^2| > |a_{33}^2| = \dfrac{2}{3}$, то переставляем местами третью и четвертую строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{14}{3} & -\frac{13}{6} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{32}{3} \\ -\frac{40}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Делим третью строку на ${a'}_{33}^2 = -\dfrac{14}{3}$ и вычитаем ее из четвёртой строки, домножив третью строку на ${a'}_{43}^2 = \dfrac{2}{3}$. Будем иметь

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{28} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{32}{3} \\ \frac{20}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

4 шаг. Разделив четвертую строку на $a_{44}^3 = -\dfrac{1}{7}$, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{28} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{32}{3} \\ \frac{20}{7} \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} x_4 &= 4, \\ x_3 &= \frac{20}{7} - \frac{13}{28} \cdot 4 = 1, \\ x_2 &= \frac{32}{3} - \frac{4}{3} \cdot 1 - \frac{7}{3} \cdot 4 = 0, \\ x_1 &= 2 - \frac{1}{4} \cdot 0 - 0 \cdot 1 - \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 4 = 3. \end{aligned}$$

1.2.4. Задание к лабораторной работе «Метод Гаусса с выбором главного элемента»

1. Решить СЛАУ аналитически методом Гаусса с выбором главного элемента ((табл. 1.1) или (табл. 1.2) по указанию преподавателя).

2. Написать программу решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента. Решить с ее помощью СЛАУ.

3. Оформить отчет по лабораторной работе:

а) теоретическая часть,

б) аналитическое решение системы,

в) текст программы,

г) результаты решения СЛАУ.

Таблица 1.1. Варианты задания для решения СЛАУ $A\vec{x} = \vec{b}$ с четырьмя неизвестными в виде $(A|\vec{b})$ методом Гаусса

<table>
<tr><th>№ вар.</th><th>№ вар.</th><th>№ вар.</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 & -19 \\ -2 & 0 & 4 & -4 & -22 \\ -3 & -5 & 4 & 1 & -23 \\ 4 & 4 & -1 & 0 & 21 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 1 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & -3 & 7 \\ -5 & 1 & 1 & 0 & 11 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & -2 & -4 & -12 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 & 2 & 6 \end{array}$</td>
</tr>
<tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -1 & -2 & 3 & 4 & -13 \\ -5 & 2 & 4 & -2 & -14 \\ 4 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -3 & 23 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -2 & -2 & -2 & -3 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ -4 & -3 & -4 & -4 & 48 \\ -3 & -4 & -2 & -2 & 39 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -2 & 0 & -1 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & 4 & 4 & -33 \\ 3 & -1 & -3 & 3 & -3 \\ 4 & 4 & -1 & -4 & 35 \end{array}$</td>
</tr>
<tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -3 & 4 & -5 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & -4 & 12 \\ -3 & -3 & -3 & -1 & -1 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 2 & -1 & -11 \\ -1 & -5 & -5 & -3 & 9 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -12 \\ -1 & -4 & -4 & 1 & 18 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -2 & -1 & -2 & -3 & -7 \\ -3 & 4 & 2 & -4 & -46 \\ -4 & -2 & -2 & -2 & -8 \\ -3 & 4 & 0 & 2 & -22 \end{array}$</td>
</tr>
</table>

Продолжение табл. 1.1.

10					**11**					**12**				
−5	1	4	4	28	−5	4	4	2	−27	2	0	1	1	−15
0	−5	−1	1	−7	−4	−4	−1	−4	16	−2	0	−3	−4	31
−2	2	4	2	8	3	2	−1	1	4	−3	4	1	−1	−11
2	−5	2	−3	−45	1	3	−2	2	2	−5	−3	1	−2	34
13					**14**					**15**				
−3	−2	−4	3	38	3	−5	2	4	31	0	−1	4	−4	−20
−2	−4	−5	−5	10	−3	1	0	1	−2	1	3	−1	1	15
0	2	2	−4	−26	4	−4	0	−5	−3	−3	4	−3	−3	37
−5	4	4	4	16	2	0	4	−4	2	−4	1	−3	1	22
16					**17**					**18**				
−1	−1	−1	−1	4	4	−3	4	−4	−6	1	−5	−4	−2	−24
−4	−5	−1	3	−4	−2	−4	0	−5	10	−4	−1	−3	2	−15
−2	1	1	4	−28	3	−3	0	3	−24	−1	0	0	−5	27
0	−4	−1	−3	31	−5	2	−3	3	12	−2	−1	1	−4	23
19					**20**					**21**				
−2	−3	0	2	8	0	3	−3	−5	−3	−1	−5	3	−3	−30
3	−4	−3	4	−10	1	−5	−5	4	−1	0	4	−4	2	28
−4	−3	−4	3	6	−3	−5	1	1	16	0	−4	−2	−3	−18
2	2	−5	3	−5	−2	0	−4	2	−16	−1	−5	−4	0	−10
22					**23**					**24**				
2	−1	−3	−5	20	1	−2	−5	4	−25	2	0	3	0	−8
4	−4	3	1	35	0	2	−3	1	−5	−4	3	−2	4	−3
−5	4	−3	4	−53	0	0	−3	0	−3	−3	−2	−3	−5	15
1	−3	2	0	22	4	2	1	4	−21	−1	2	2	−2	2

Окончание табл. 1.1.

<table>
<tr><th>25</th><th>26</th><th>27</th></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -2 & -5 & -11 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & -2 & -5 & -25 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -2 & 1 & 1 & 3 & -7 \\ -4 & -3 & 0 & -4 & 21 \\ -5 & -4 & -5 & -1 & 48 \\ 1 & -3 & 4 & -3 & -10 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 4 & -4 & -1 & 3 & 14 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & 10 \\ -1 & 2 & -2 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & -14 \end{array}$</td>
</tr>
<tr><th>28</th><th>29</th><th>30</th></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 4 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -4 & 8 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 0 & 2 & 4 & 1 & -4 \\ -1 & -4 & -4 & 0 & 20 \\ 3 & -3 & 4 & -4 & -1 \\ -2 & -4 & -3 & -2 & 21 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -1 & -5 & 2 & -1 & 34 \\ 3 & 4 & -1 & -1 & -36 \\ 4 & 0 & -2 & 1 & -21 \\ -5 & 0 & 3 & 4 & 33 \end{array}$</td>
</tr>
</table>

Таблица 1.2. Варианты задания для решения СЛАУ $A\vec{x} = \vec{b}$ с пятью неизвестными в виде $(A|\vec{b})$ методом Гаусса

<table>
<tr><th>№ вар.</th><th>№ вар.</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -5 & -1 & -5 & -5 & -17 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 3 & -22 \\ -3 & 4 & -3 & -3 & -3 & 22 \\ -3 & -2 & 0 & 4 & -5 & 39 \\ 3 & -4 & 4 & 4 & -3 & -9 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 1 & 0 & -5 & 22 \\ -4 & 0 & 2 & 4 & -1 & 35 \\ -2 & -4 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ -4 & -3 & -1 & 4 & -4 & 38 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & -5 & 44 \end{array}$</td>
</tr>
</table>

Продолжение табл. 1.2.

3						**4**					
0	−5	1	−5	0	27	−2	4	1	3	−1	28
1	−3	1	1	−4	−10	2	−5	4	−2	−1	−17
2	3	−5	−3	4	41	3	−2	4	2	4	−28
−4	−5	1	4	3	−24	−1	2	2	1	4	−3
1	−5	1	−5	−4	22	−4	−5	−1	4	−5	24
5						**6**					
−4	−2	1	−5	−1	−17	4	−2	4	1	−3	−13
−3	2	3	2	−1	12	−4	3	0	−1	−3	15
−2	0	−4	4	−3	−5	3	3	2	−4	0	−4
−4	3	−5	3	−2	−20	1	−2	−2	−1	3	−9
2	2	0	−2	−5	−15	−2	−2	−3	−1	−3	−12
7						**8**					
−1	4	3	1	4	29	0	−3	−2	−2	0	4
−1	−3	3	−5	3	48	1	−4	0	−4	−5	−14
−1	−3	−4	2	−2	−35	2	2	1	4	−4	−13
2	0	0	1	4	7	2	−3	−1	−1	1	−1
2	3	−2	4	0	−29	4	−5	−3	−3	4	−1
9						**10**					
2	4	−2	−1	−4	−31	2	−1	2	−2	−1	10
−3	−5	−3	−2	3	2	4	−1	−2	0	−5	−10
−4	3	2	3	2	28	3	−1	−3	−3	1	1
−2	−5	4	0	3	34	3	0	4	−2	−4	17
−5	−3	−3	2	4	19	0	1	−5	3	−5	−26

Продолжение табл. 1.2.

11

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 4 & -1 & 4 & -5 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & -3 & 2 & 0 & -10 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 0 & -10 \\ -5 & -5 & -5 & -2 & -5 & 9 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & -4 & 8 \end{array}\right)$$

12

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -5 & -3 & -3 & -5 & 4 & -54 \\ -4 & 3 & -3 & 4 & -1 & -13 \\ 1 & -3 & 0 & -2 & -2 & -3 \\ -5 & -1 & -1 & -3 & -3 & -24 \\ -1 & 2 & 0 & -5 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

13

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -3 & 1 & -4 & -1 & 25 \\ 2 & 4 & -3 & -5 & 2 & 32 \\ 2 & 0 & -2 & -3 & 3 & 30 \\ -3 & -4 & -1 & -1 & 4 & 23 \\ 4 & -2 & 1 & -3 & -4 & 16 \end{array}\right)$$

14

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 4 & 4 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & -5 & -27 \\ 4 & -2 & -2 & -1 & -1 & -14 \\ 4 & 1 & 1 & -1 & 1 & -15 \\ 4 & 4 & -4 & -1 & 2 & -49 \end{array}\right)$$

15

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -4 & -1 & 3 & 0 & -4 & -26 \\ -3 & -2 & 3 & -4 & 3 & 12 \\ -2 & -5 & 1 & -3 & 4 & 25 \\ 4 & -4 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 1 & -4 & -1 & 28 \end{array}\right)$$

16

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 0 & -5 & -2 & 4 & 43 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 4 & 28 \\ -5 & -3 & -4 & -3 & -4 & 16 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & -3 & 4 & 16 \end{array}\right)$$

17

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 4 & 1 & 4 & -3 & 4 & 22 \\ -3 & 1 & -5 & -2 & -5 & -16 \\ 0 & -5 & 0 & -1 & 4 & 10 \\ 1 & -2 & -2 & -2 & -4 & -20 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & -1 & -9 \end{array}\right)$$

18

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -3 & -3 & -4 & -4 & 0 & -34 \\ -2 & -2 & 2 & -5 & -3 & -12 \\ -1 & -5 & -4 & -5 & -2 & -46 \\ -1 & -3 & 2 & -3 & -1 & -14 \\ -2 & 4 & 3 & 1 & -2 & 37 \end{array}\right)$$

Продолжение табл. 1.2.

19						**20**					
3	−5	2	−4	−4	−33	1	−5	−1	2	0	−13
−3	−5	1	−4	−1	−16	−5	0	−1	−1	0	4
4	0	2	4	4	−16	−1	1	−4	−4	−2	−4
−2	2	4	3	−1	10	−2	0	−5	−3	1	−6
3	2	0	−2	1	−4	−4	1	3	1	−4	8
21						**22**					
−4	1	0	1	−1	24	−1	−5	−1	−5	−4	−14
3	−3	−3	2	−3	5	−3	2	2	−5	−3	24
4	4	−3	3	1	11	3	−2	−2	3	−1	−16
3	4	1	−5	−5	−17	0	2	0	4	3	7
−1	−5	1	4	−4	15	3	−1	3	2	−3	−3
23						**24**					
4	−1	−3	3	−5	−23	0	−2	−1	0	4	25
−2	−5	2	−5	−3	34	1	3	−3	−1	0	−19
2	4	3	2	−2	−31	1	1	1	−2	3	3
3	4	3	−2	4	0	−5	2	1	−5	−2	−52
−2	−4	2	−1	2	21	−3	2	1	2	−4	−26
25						**26**					
3	1	−4	−2	−5	0	−3	−2	−2	1	−5	−11
0	3	−2	1	1	8	−5	0	2	−4	2	−9
4	−2	−2	−4	−1	−17	−4	1	−1	1	−2	−11
4	−3	1	1	−1	−17	−4	2	0	3	−1	−4
4	4	−3	3	−5	7	−4	3	0	−5	−2	−34

Окончание табл. 1.2.

27						**28**					
1	3	4	−1	−4	28	0	−2	−2	−3	−2	16
3	4	−5	−5	−3	−16	0	3	−2	4	3	−32
3	−3	4	0	−1	36	3	−2	4	0	3	3
−2	−5	3	−2	−2	31	−2	−4	0	1	4	−36
4	1	0	1	−3	21	4	−3	−4	−2	−3	28
29						**30**					
3	−1	2	3	0	34	−3	0	−1	−5	−5	17
−4	−1	−2	3	1	−7	3	−3	0	−4	−2	−7
−3	−4	2	2	4	24	−5	3	−5	−2	−3	28
−3	−1	4	0	−4	−6	−3	−1	2	4	1	10
−1	−1	−2	−5	1	−27	3	−5	−3	−3	−3	1

1.3. Решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью LU-разложения

Рассмотрим систему уравнений $A\vec{x} = \vec{f}$. Если все главные миноры матрицы $A = (a_{ij})$ отличны от нуля, т.е.

$$a_{11} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad ..., \quad \det A \neq 0,$$

то матрицу A можно представить в виде $A = LU$, где L - нижняя треугольная матрица с единичной диагональю; U - верхняя треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами.

Приведем рекуррентные формулы для определения треугольных матриц

L и U:

$$u_{11} = a_{11},$$

$$u_{1j} = a_{1j}, \quad l_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}}, \quad j = 2, 3, ..., n;$$

$$u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{ki} \quad i = 2, 3, ..., n;$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right),$$

$$i = 2, 3, ..., n; \quad j = i+1, i+2, ..., n.$$

Далее решаем две системы уравнений с треугольными матрицами:

$$Ly = f, \quad Ux = y.$$

1.3.1. Задание к лабораторной работе «Решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью LU-разложения»

1. Решить СЛАУ аналитически LU-разложением (табл. 1.3).

2. Написать программу решения системы линейных алгебраических уравнений LU-разложением. Решить с ее помощью СЛАУ.

3. Оформить отчет о лабораторной работе:

а) теоретическая часть,

б) аналитическое решение системы,

в) текст программы,

г) результаты.

Таблица 1.3. Варианты задания для решения СЛАУ $A\vec{x} = \vec{b}$ с четырьмя неизвестными в виде $(A|\vec{b})$ LU-разложением или методом квадратного корня

<table>
<tr><th>№ вар.</th><th>№ вар.</th><th>№ вар.</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -10 & -10 & 7 & -6 & 1 \\ -10 & -5 & 3 & -4 & 44 \\ 7 & 3 & -7 & -3 & -21 \\ -6 & -4 & -3 & -2 & 73 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -9 & -5 & 8 & -3 & 93 \\ -5 & 5 & -4 & 3 & 1 \\ 8 & -4 & 6 & 4 & -70 \\ -3 & 3 & 4 & -4 & 29 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 6 & -5 & -1 & -8 & 158 \\ -5 & 7 & -5 & 5 & -100 \\ -1 & -5 & 9 & -1 & -20 \\ -8 & 5 & -1 & 7 & -146 \end{array}$</td>
</tr>
<tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 9 & -6 & 3 & -5 & 101 \\ -6 & -9 & 5 & -1 & -91 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 14 \\ -5 & -1 & 0 & 1 & -58 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 4 & 9 & 5 & 4 & -70 \\ 9 & -7 & -8 & 8 & 150 \\ 5 & -8 & 5 & 1 & 12 \\ 4 & 8 & 1 & 7 & -23 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -5 & 7 & -7 & -5 & 58 \\ 7 & 0 & 9 & -7 & 11 \\ -7 & 9 & -7 & -5 & 54 \\ -5 & -7 & -5 & -7 & 76 \end{array}$</td>
</tr>
<tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 2 & 4 & 4 & -9 & 21 \\ 4 & -9 & -9 & -8 & -2 \\ 4 & -9 & 5 & 6 & 40 \\ -9 & -8 & 6 & -3 & 25 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -4 & -4 & 3 & 3 & -26 \\ -4 & 8 & -4 & -1 & 36 \\ 3 & -4 & -5 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 4 & -11 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 7 & 3 & -8 & 41 \\ 7 & -1 & -2 & -8 & -107 \\ 3 & -2 & -9 & 0 & -97 \\ -8 & -8 & 0 & 3 & 17 \end{array}$</td>
</tr>
<tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 8 & -5 & 4 & 4 & -161 \\ -5 & -1 & 3 & -7 & 82 \\ 4 & 3 & -6 & 8 & -53 \\ 4 & -7 & 8 & -3 & -100 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -8 & 7 & 1 & 3 & 14 \\ 7 & -8 & 3 & -10 & 52 \\ 1 & 3 & -4 & 8 & -74 \\ 3 & -10 & 8 & 0 & 72 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -3 & -1 & -9 & 7 & -35 \\ -1 & 5 & -7 & 8 & -62 \\ -9 & -7 & -1 & -8 & 46 \\ 7 & 8 & -8 & 7 & -103 \end{array}$</td>
</tr>
</table>

Продолжение табл. 1.3.

13	**14**	**15**
$\begin{array}{rrrr\|r} -8 & 2 & 8 & 0 & -10 \\ 2 & -4 & -2 & -6 & 46 \\ 8 & -2 & -7 & 3 & -17 \\ 0 & -6 & 3 & 9 & -99 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 4 & -8 & -6 & 7 & -19 \\ -8 & 4 & -2 & 9 & 47 \\ -6 & -2 & -7 & -10 & 117 \\ 7 & 9 & -10 & -7 & -46 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} -9 & -1 & 0 & -1 & -68 \\ -1 & 3 & 6 & 1 & -28 \\ 0 & 6 & -5 & -3 & 28 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & 13 \end{array}$
16	**17**	**18**
$\begin{array}{rrrr\|r} 1 & 7 & -3 & -3 & 67 \\ 7 & 2 & 5 & -1 & 11 \\ -3 & 5 & -6 & 3 & 82 \\ -3 & -1 & 3 & 6 & -14 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} -5 & -5 & 4 & -1 & -19 \\ -5 & 9 & -7 & -10 & -3 \\ 4 & -7 & -6 & 7 & -96 \\ -1 & -10 & 7 & -4 & 26 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} -3 & 6 & -10 & -6 & 24 \\ 6 & -9 & 0 & -2 & 13 \\ -10 & 0 & -10 & -7 & 75 \\ -6 & -2 & -7 & 4 & 10 \end{array}$
19	**20**	**21**
$\begin{array}{rrrr\|r} -7 & -5 & -9 & 4 & -67 \\ -5 & -4 & 5 & 3 & -18 \\ -9 & 5 & 1 & 7 & 13 \\ 4 & 3 & 7 & -10 & 122 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} -7 & -7 & -2 & -2 & 34 \\ -7 & -8 & -10 & 0 & 33 \\ -2 & -10 & 5 & 1 & 62 \\ -2 & 0 & 1 & -6 & 39 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} -3 & 3 & -6 & 6 & 21 \\ 3 & 0 & -2 & -10 & -129 \\ -6 & -2 & 9 & -7 & 61 \\ 6 & -10 & -7 & -10 & -106 \end{array}$
22	**23**	**24**
$\begin{array}{rrrr\|r} -8 & -6 & 5 & 9 & -17 \\ -6 & -1 & -10 & 1 & -73 \\ 5 & -10 & 6 & 8 & -13 \\ 9 & 1 & 8 & 0 & 76 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 7 & 9 & 4 & 5 & 116 \\ 9 & -10 & -3 & -4 & -15 \\ 4 & -3 & -9 & 5 & 129 \\ 5 & -4 & 5 & -5 & -82 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 8 & -1 & 3 & -3 & 137 \\ -1 & -2 & 4 & 3 & 13 \\ 3 & 4 & -4 & 2 & -61 \\ -3 & 3 & 2 & 0 & -33 \end{array}$

Окончание табл. 1.3.

25	**26**	**27**
$\begin{matrix} 2 & -3 & 0 & 2 & \vert & 15 \\ -3 & 6 & 2 & 9 & \vert & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & \vert & -15 \\ 2 & 9 & -1 & 9 & \vert & -46 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5 & -10 & 2 & 6 & \vert & -1 \\ -10 & -1 & -7 & 2 & \vert & -10 \\ 2 & -7 & -9 & 9 & \vert & 64 \\ 6 & 2 & 9 & 5 & \vert & -82 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 7 & -9 & -1 & \vert & -33 \\ 7 & 8 & 7 & 7 & \vert & -32 \\ -9 & 7 & 4 & 9 & \vert & 45 \\ -1 & 7 & 9 & -6 & \vert & 124 \end{matrix}$
28	**29**	**30**
$\begin{matrix} -10 & 6 & 1 & -1 & \vert & -85 \\ 6 & -2 & -8 & 5 & \vert & 40 \\ 1 & -8 & 7 & -9 & \vert & 64 \\ -1 & 5 & -9 & 1 & \vert & -28 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -4 & -1 & 8 & 4 & \vert & -71 \\ -1 & -2 & -9 & 6 & \vert & -33 \\ 8 & -9 & -5 & -10 & \vert & 53 \\ 4 & 6 & -10 & -4 & \vert & 110 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -2 & -3 & 3 & -2 & \vert & 12 \\ -3 & 2 & 5 & 6 & \vert & 14 \\ 3 & 5 & -1 & 0 & \vert & -40 \\ -2 & 6 & 0 & 2 & \vert & -20 \end{matrix}$

1.4. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом квадратного корня

Метод квадратного корня по содержанию близок к LU-разложению. Основное отличие состоит в том, что метод квадратного корня дает упрощение для симметричных матриц.

Рассмотрим систему уравнений $A\vec{x} = \vec{f}$. Пусть все главные миноры матрицы $A = (a_{ij})$ отличны от нуля, т.е.

$$a_{11} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad ..., \quad \det A \neq 0.$$

Метод квадратного корня основан на разложении матрицы A в произведение

$$A = S^T D S,$$

где S – верхняя треугольная матрица с положительными элементами на главной диагонали, S^T – транспонированная к ней матрица, а D – диагональная матрица с элементами $d_{ii} = \pm 1,\ i = 1, ..., n.$

Пусть $A(n \times n)$. Тогда

$$(S^T D S)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}^T d_{kk} s_{kj}.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} s_{ik}^T d_{kk} s_{kj} = a_{ij}, \quad i, j = 1, ..., n. \tag{1.4.1}$$

Так как матрица A симметричная, не ограничивая общности, будем считать, что выполняется неравенство $i \le j$. Тогда (1.4.1) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{i-1} s_{ik}^T d_{kk} s_{kj} + s_{ii} d_{ii} s_{ij} + \sum_{k=i+1}^{n} s_{ik}^T d_{kk} s_{kj} = a_{ij},$$

при этом

$$s_{ik}^T = s_{ki} = 0, \quad i < k.$$

Получаем систему уравнений

$$s_{ii} d_{ii} s_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} s_{ik}^T d_{kk} s_{kj} = a_{ij}, \quad i \le j.$$

В частности, при $i = j$

$$\begin{gathered}
|s_{ii}|^2 d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk}, \\
d_{ii} = \operatorname{sign}\left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk} \right), \\
s_{ii} = \left(\left| a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk} \right| \right)^{1/2}.
\end{gathered} \tag{1.4.2}$$

При $i < j$ получим

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}s_{kj}d_{kk}}{s_{ii}d_{ii}}. \tag{1.4.3}$$

По формулам (1.4.2) и (1.4.3) находим рекуррентно все ненулевые элементы матрицы S. Запишем порядок вычисления элементов матриц S и D:

$$\begin{aligned}
&d_{11}, s_{11}, s_{12}, s_{13}, ..., s_{1n},\\
&d_{22}, s_{22}, s_{23}, s_{24}, ..., s_{2n},\\
&...\\
&d_{nn}, s_{nn}.
\end{aligned}$$

Обратный ход метода квадратного корня состоит в последовательном решении двух систем уравнений с треугольными матрицами:

$$S^T\vec{y} = \vec{f}, \quad DS\vec{x} = \vec{y}.$$

Решения этих систем находим по рекуррентным формулам

$$\begin{cases}
y_1 = f_1/s_{11},\\
y_i = \dfrac{f_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} s_{ki}y_k}{s_{ii}}, \quad i = 2, 3, ..., n;
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
x_n = d_{nn}y_n/s_{nn},\\
x_i = \dfrac{d_{ii}y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} s_{ik}x_k}{s_{ii}}, \quad i = n-1, n-2, ..., 1.
\end{cases}$$

Всего метод квадратного корня при факторизации $A = S^TDS$ требует примерно $n^3/6$ операций умножения и деления и n операций извлечения квадратного корня (см., например, [1]).

1.4.1. Задание к лабораторной работе «Решение систем линейных алгебраических уравнений методом квадратного корня»

1. Решить СЛАУ аналитически методом квадратного корня (см. табл. 1.3).

2. Написать программу для решения СЛАУ методом квадратного корня. Решить с ее помощью СЛАУ.

3. Найти меру обусловленности симметричной матрицы A, используя степенной метод для нахождения наибольших по модулю собственных значений матриц A и A^{-1}.

4. Оформить отчет о лабораторной работе:

а) теоретическая часть;

б) аналитическое решение системы методом квадратного корня;

в) текст программы;

г) результаты.

1.5. Решение систем линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональной матрицей методом прогонки

Рассмотрим СЛАУ вида:

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = f_i, \quad i = 1, 2, ..., n-1, \tag{1.5.1}$$

$$y_0 = \kappa_1 y_1 + \mu_1, \quad y_n = \kappa_2 y_{n-1} + \mu_2, \tag{1.5.2}$$

где

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \text{— вектор решения.}$$

В матричном форме СЛАУ можно записать так:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\kappa_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\kappa_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{n-1} \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (1.5.1), (1.5.2) ищем в виде

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}. \tag{1.5.3}$$

Из (1.5.3) следует

$$y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i. \tag{1.5.4}$$

Подставим (1.5.4) в (1.5.1):

$$a_i(\alpha_i y_i + \beta_i) + b_i y_i + c_i y_{i+1} = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Отсюда

$$y_i = -\frac{c_i}{a_i \alpha_i + b_i} y_{i+1} + \frac{f_i - a_i \beta_i}{a_i \alpha_i + b_i}. \tag{1.5.5}$$

Сравнив (1.5.3) и (1.5.5), получим

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = -\dfrac{c_i}{a_i \alpha_i + b_i}, \\ \beta_{i+1} = \dfrac{f_i - a_i \beta_i}{a_i \alpha_i + b_i}, \quad i = 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Из (1.5.2) следует $\alpha_1 = \kappa_1$, $\beta_1 = \mu_1$. Из (1.5.3) при $i = n - 1$

$$y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n. \tag{1.5.6}$$

Подставим (1.5.6) в (1.5.2) и получим

$$y_n = \frac{\kappa_2 \beta_n + \mu_2}{1 - \kappa_2 \alpha_n}. \tag{1.5.7}$$

Запишем формулы в порядке их применения:

а) *прямой ход* метода прогонки:

$$\alpha_1 = \kappa_1, \quad \beta_1 = \mu_1;$$

$$\alpha_{i+1} = -\frac{c_i}{a_i \alpha_i + b_i};$$

$$\beta_{i+1} = \frac{f_i - a_i \beta_i}{a_i \alpha_i + b_i}, \quad i = 1, ..., n-1.$$

б) *обратный ход* метода прогонки:

$$y_n = \frac{\kappa_2 \beta_n + \mu_2}{1 - \kappa_2 \alpha_n};$$

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, ..., 0.$$

Достаточные условия применимости метода прогонки: $|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$, $(|\kappa_1| \leq 1$ и $|\kappa_2| < 1)$ или $(|\kappa_1| < 1$ и $|\kappa_2| \leq 1)$.

Пример. Пусть матрица СЛАУ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 15 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Свободные члены:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 38 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = -2;$$

$$\alpha_2 = -\frac{c_1}{a_1\alpha_1 + b_1} = \frac{2}{1+15} = \frac{1}{8},$$

$$\beta_2 = \frac{f_1 - a_1\beta_1}{a_1\alpha_1 + b_1} = \frac{38+2}{1+15} = \frac{5}{2};$$

$$\alpha_3 = -\frac{c_2}{a_2\alpha_2 + b_2} = -\frac{1}{-0.125+3} = -\frac{8}{23},$$

$$\beta_3 = \frac{f_2 - a_2\beta_2}{a_2\alpha_2 + b_2} = \frac{11+2.5}{-0.125+3} = \frac{108}{23};$$

$$y_3 = \frac{\kappa_2\beta_3 + \mu_2}{1 - \kappa_2\alpha_3} = \frac{-1\cdot(108/23) + 6}{1 - 8/23} = 2,$$

$$y_2 = \alpha_3 y_3 + \beta_3 = -\frac{8}{23}\cdot 2 + \frac{108}{23} = 4,$$

$$y_1 = -\frac{1}{8}\cdot 4 + 2,5 = 3,$$

$$y_0 = 3 - 2 = 1.$$

1.5.1. Задание к лабораторной работе «Решение СЛАУ с трёхдиагональной матрицей методом прогонки»

1. Решить СЛАУ с трехдиагональной матрицей аналитически методом прогонки (табл. 1.4).

2. Написать программу решения СЛАУ методом прогонки. Решить с ее помощью СЛАУ из своего варианта.

3. Оформить отчет по лабораторной работе:

а) теоретическая часть;

б) аналитическое решение системы методом прогонки;

в) текст программы;

г) результаты.

Таблица 1.4. Варианты задания для решения СЛАУ $A\vec{x} = \vec{b}$ с трехдиагональной матрицей методом прогонки

№ вар.	№ вар.	№ вар.
1	**2**	**3**
$\begin{array}{rrrr\|r} 1 & 4 & 0 & 0 & -11 \\ -10 & -10 & 7 & 0 & -13 \\ 0 & -6 & -5 & 3 & 54 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -64 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 1 & -5 & 0 & 0 & -27 \\ -9 & 6 & -9 & 0 & -27 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & 14 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 12 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -7 & -4 & -1 & 0 & -34 \\ 0 & -6 & 6 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 49 \end{array}$
4	**5**	**6**
$\begin{array}{rrrr\|r} 1 & -9 & 0 & 0 & 63 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & -6 & 3 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -11 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 1 & -9 & 0 & 0 & 86 \\ -9 & 5 & -1 & 0 & -18 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & -61 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 4 & -7 & 0 & 58 \\ 0 & -8 & 8 & 5 & -22 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 65 \end{array}$

Продолжение табл. 1.4.

<table>
<tr><th>№ вар.</th><th>№ вар.</th><th>№ вар.</th></tr>
<tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 9 & 0 & 0 & 37 \\ -5 & -7 & 2 & 0 & 17 \\ 0 & 4 & 4 & -9 & 71 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 51 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -6 & 0 & 0 & 45 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & -36 \\ 0 & -1 & -4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & -79 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 0 & 0 & 15 \\ 3 & -6 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & 6 & -63 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 28 \end{array}$</td></tr>
<tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 9 & 0 & 0 & 33 \\ -1 & -2 & -8 & 0 & -76 \\ 0 & -9 & 0 & 3 & -42 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -69 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -8 & 0 & 0 & -80 \\ 4 & 4 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & -7 & -6 & 109 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -21 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 10 & 0 & 0 & 8 \\ -8 & 7 & 1 & 0 & -68 \\ 0 & 3 & -8 & 3 & 26 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -18 \end{array}$</td></tr>
<tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & 0 & 0 & 13 \\ 8 & -4 & -3 & 0 & 92 \\ 0 & -1 & -9 & 7 & 122 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -49 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & 0 & -12 \\ 9 & -7 & -10 & 0 & -74 \\ 0 & -7 & -10 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -7 & 0 & 0 & -26 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & -3 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 5 \end{array}$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 0 & 0 & -19 \\ -3 & -3 & 2 & 0 & -53 \\ 0 & 5 & -1 & -6 & 17 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 47 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 10 & 0 & 0 & -33 \\ -5 & -5 & 4 & 0 & 13 \\ 0 & -1 & 9 & -7 & 32 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 47 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 9 & 0 & 0 & 41 \\ -4 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -5 & -51 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -11 \end{array}$</td></tr>
</table>

Окончание табл. 1.4.

19	**20**	**21**
$\begin{array}{rrrrcr} 1 & -3 & 0 & 0 & \vert & 39 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & \vert & -4 \\ 0 & -6 & -2 & 4 & \vert & 96 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & \vert & -21 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrcr} 1 & 8 & 0 & 0 & \vert & -57 \\ -1 & 0 & 7 & 0 & \vert & -27 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & \vert & -11 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & \vert & 38 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrcr} 1 & -3 & 0 & 0 & \vert & 28 \\ 6 & -1 & -8 & 0 & \vert & 105 \\ 0 & -1 & -8 & -4 & \vert & 47 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & \vert & 46 \end{array}$
22	**23**	**24**
$\begin{array}{rrrrcr} 1 & 7 & 0 & 0 & \vert & -16 \\ 7 & -10 & -5 & 0 & \vert & 46 \\ 0 & 7 & 3 & -10 & \vert & 62 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & \vert & -66 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrcr} 1 & 1 & 0 & 0 & \vert & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & \vert & 9 \\ 0 & -6 & 7 & -9 & \vert & -114 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & \vert & -48 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrcr} 1 & 9 & 0 & 0 & \vert & 87 \\ 0 & -2 & -10 & 0 & \vert & 62 \\ 0 & 9 & -7 & -10 & \vert & 197 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & \vert & -70 \end{array}$
25	**26**	**27**
$\begin{array}{rrrrcr} 1 & 4 & 0 & 0 & \vert & -15 \\ 7 & 9 & 4 & 0 & \vert & 18 \\ 0 & 5 & -10 & -3 & \vert & -119 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & \vert & 71 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrcr} 1 & 2 & 0 & 0 & \vert & -5 \\ -10 & 7 & 8 & 0 & \vert & -42 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & \vert & 10 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & \vert & -8 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrcr} 1 & -5 & 0 & 0 & \vert & -28 \\ -1 & 9 & -6 & 0 & \vert & 58 \\ 0 & -7 & -2 & 3 & \vert & -61 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & \vert & -17 \end{array}$
28	**29**	**30**
$\begin{array}{rrrrcr} 1 & 10 & 0 & 0 & \vert & 71 \\ 2 & -9 & 9 & 0 & \vert & -142 \\ 0 & 5 & 7 & -2 & \vert & -26 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & \vert & -55 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrcr} 1 & 7 & 0 & 0 & \vert & -43 \\ 8 & 7 & 7 & 0 & \vert & -71 \\ 0 & 4 & 9 & -6 & \vert & -154 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & \vert & 36 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrcr} 1 & 9 & 0 & 0 & \vert & -49 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & \vert & 13 \\ 0 & -8 & 5 & 7 & \vert & 29 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \vert & -1 \end{array}$

1.6. Численные методы решения систем нелинейных уравнений

1.6.1. Метод последовательных приближений

Рассмотрим уравнение вида

$$x = \varphi(x).$$

Построим графики функций обеих частей уравнения (рис. 1.2).

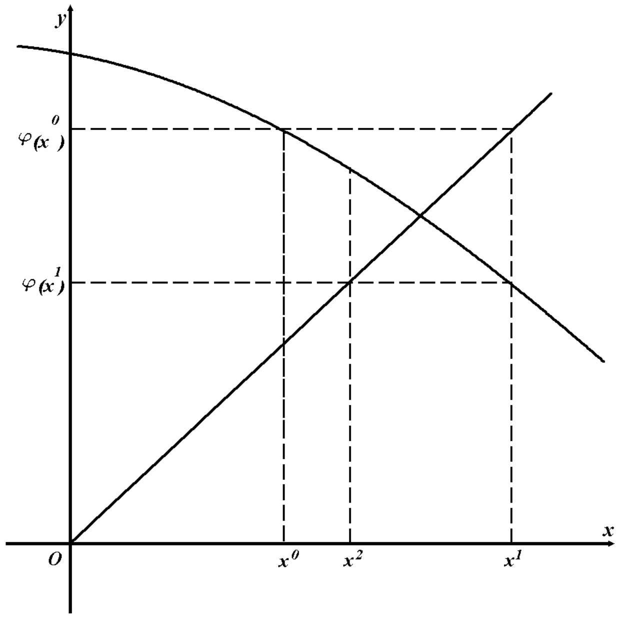

Рис. 1.2.

Решением уравнения является абсцисса x^* точки пересечения графика функции $\varphi(x)$ и биссектрисы $y = x$. Точек пересечения x^* может быть несколько. Допустим, что для точного решения x^* каким-либо способом указано начальное приближение x^0. В простейшем методе итераций все дальнейшие итерации строятся по формуле:

$$x^{n+1} = \varphi(x^n), \quad n = 0, 1, 2, ..., .$$

Этот процесс называется простой одношаговой итерацией (см. рис. 1.2).

Выясним поведение приближений x^n, когда они находятся вблизи решения x^*. Удобнее иметь дело не с приближениями x^n , а с их погрешностями $\varepsilon_n = x^* - x^n$, так как это дает право воспользоваться малостью ε_n:

$$x^{n+1} = x^* - \varepsilon_{n+1} = \varphi(x^n) = \varphi(x^* - \varepsilon_n) = \varphi(x^*) - \varphi'(x^*)\varepsilon_n + o(\varepsilon_n).$$

Следовательно, $\varepsilon_{n+1} \approx \varepsilon_n \varphi'(x^*)$.

Рассмотрим три случая.

1. При $|\varphi'(x^*)| > 1$ погрешность ε_{n+1} по абсолютному значению больше погрешности ε_n, и приближение x^{n+1} будет отстоять от точного решения x^* дальше, чем значение x^n. Решение x^* будет "точкой отталкивания"для приближений, близких к x^*, и в этом случае не будет сходимости приближения x^n к точному решению x^*.

2. Если $|\varphi'(x^*)| < 1$, то $|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_n|$, поэтому при начальном приближении x^0, достаточно близким к x^*, x^n сходится к точному решению x^* примерно со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = \varphi'(x^*)$. При $\varphi'(x^*) > 0$ погрешности ε_{n+1} и ε_n будут иметь одинаковые знаки и сходимость будет монотонной. Когда же $\varphi'(x^*) < 0$, погрешности ε_{n+1} и ε_n имеют разные знаки, и приближение x^n будет сходиться к точному решению x^*, колеблясь около x^*. Интервал колебаний часто позволяет оценить точность вычислений.

3. При $\varphi'(x^*) = 0$ погрешность $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ со скоростью, превосходящей сходимость геометрической прогрессии со сколь угодно малым знаменателем.

Для решения системы уравнений методом итераций преобразуем ее к виду $\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{x})$, или

$$x_1 = \Phi_1(x_1, ..., x_m),$$

$$x_2 = \Phi_2(x_1, ..., x_m),$$
$$...$$
$$x_m = \Phi_m(x_1, ..., x_m).$$

При этом итерации проводят по формуле

$$\vec{x}^{\,n+1} = \vec{\Phi}(\vec{x}^{\,n}),$$

или

$$x_i^{n+1} = \Phi_i(x_1^n, x_2^n, ..., x_m^n), \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Перейдем к изучению метода с более общих позиций.

Определение. Пусть X — полное нормированное пространство (т.е. пространство, в котором сходится любая фундаментальная последовательность), например R^n, а оператор $y = \Phi(x)$ отображает X в себя. Если при некотором значении $0 \le q < 1$ при всех значениях $x_1, x_2 \in X$

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| \le q\|x_1 - x_2\|,$$

то такое отображение называется сжимающим.

Теорема (принцип сжимающих отображений). Если отображение $y = \Phi(x)$ сжимающее, то уравнение $y = \Phi(x)$ имеет единственное решение x^* и

$$\|x^* - x^k\| \le \frac{q^k}{1-q}\|x^1 - x^0\|.$$

Доказательство. Из определения имеем

$$\|x^{n+1} - x^n\| = \|\Phi(x^n) - \Phi(x^{n-1})\| \le q\|x^n - x^{n-1}\|,$$

следовательно,

$$\|x^{n+1} - x^n\| \le q^n\|x^1 - x^0\| = q^n a.$$

Пусть $l > n$. Тогда из свойств нормированного пространствам имеем

$$\|x^l - x^n\| \leq \|x^l - x^{l-1}\| + ... + \|x^{n-1} - x^n\| \leq$$

$$\leq q^{l-1}a + ... + q^n a \leq q^n a \sum_{l=0}^{\infty} q^l = \frac{q^n}{1-q}a.$$

Таким образом, последовательность x^n фундаментальна. Покажем единственность неподвижной точки. Допустим их две: x^* и y^* . Тогда

$$\|x^* - y^*\| = \|\Phi(x^*) - \Phi(y^*)\| \leq q\|x^* - y^*\|,$$

т.е. пришли к противоречию.

Замечание. Сжимаемость оператора Φ необходима лишь в некоторой окрестности точки x^*. В достаточно малой окрестности решения $\vec{x}^* \in R^m$ системы для приближения методом простых итераций имеем:

$$\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^* = \vec{\Phi}(\vec{x}^n) - \vec{\Phi}(\vec{x}^*) \approx \Phi'(\vec{x}^*)(\vec{x}^n - \vec{x}^*),$$

где

$$\Phi'(\vec{x}^*) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & ... & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} & ... & \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

— матрица Якоби.

Следовательно, если $\|\Phi'(\vec{x}^*)\| < 1$, то можно ожидать сходимости итерационного процесса при условии, что итерации $\vec{x}^n$ не очень далеки от точного решения.

1.6.2. Метод Ньютона

Если известно довольно хорошее начальное приближение к точному решению $\vec{x}^*$ системы уравнений:

$$\vec{F}(\vec{x}) = 0,$$

то эффективным методом повышения точности численного решения является метод Ньютона. Идея метода Ньютона заключается в том, что в окрестности имеющегося приближения $\vec{x}^n$ задачу заменяют некоторой вспомогательной линейной задачей.

Рассмотрим уравнение $f(x) = 0$:

$$f(x) \approx f(x^n) + f'(x^n)(x - x^n) = 0.$$

Его решение

$$x = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}$$

принимают за следующее приближение, т.е.

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}.$$

Для пояснения итерационного процесса запишем уравнение касательной к функции $f(x)$ в точке x^0:

$$y - f(x^0) = f'(x^0)(x - x^0).$$

Если положить $y = 0$, то получим

$$x = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)},$$

поэтому метод Ньютона называют еще методом касательных.

Рассмотрим общий случай. Пусть отображение $\vec{F} : R^m \to R^m$. Тогда

$$\vec{x}^{\,n+1} = \vec{x}^{\,n} - \left[F'(\vec{x}^{\,n})\right]^{-1} \vec{F}(\vec{x}^{\,n}).$$

Пусть $\Omega_a = \{\vec{x} : \|\vec{x} - \vec{x}^*\| < a\}$. И пусть при некоторых значениях a, a_1, a_2, $0 < a < \infty$, $0 \leq a_1, a_2 < \infty$, выполнены условия:

1) $\|\left[F'(\vec{x})\right]^{-1}\| \leq a_1$ при $\vec{x} \in \Omega_a$,

2) $\|\vec{F}(\vec{u}_1) - \vec{F}(\vec{u}_2) - F'(\vec{u}_2)(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)\| \leq a_2 \|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|^2$ при $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \Omega_a \subset R^n$.

Обозначим $c = a_1 a_2, \quad b = \min(a, c^{-1})$.

Условие 2 автоматически выполняется, если функции имеют ограниченные вторые производные, так как по формуле Тейлора

$$F_i(\vec{y}) = F_i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i(x_1, ..., x_m)}{\partial x_j}(y_j - x_j) + o\left(\|\vec{y} - \vec{x}\|^2\right).$$

Теорема (о сходимости метода Ньютона). При выполнении условий 1, 2 и $\vec{x} \in \Omega_b$ итерационный процесс Ньютона вида

$$\vec{x}^{\,n+1} = \vec{x}^{\,n} - \left[F'(\vec{x}^{\,n})\right]^{-1} \cdot \vec{F}(\vec{x}^{\,n})$$

сходится с оценкой погрешности

$$\|\vec{x}^{\,n} - \vec{x}^*\| \leq c^{-1}\left(c\|\vec{x}^{\,0} - \vec{x}^*\|\right)^{2^n}.$$

Доказательство. Пусть начальное приближение $\vec{x}^{\,0} \in \Omega_b$. Покажем, что если итерация $\vec{x}^{\,n} \in \Omega_b$, то и итерация $\vec{x}^{\,n+1} \in \Omega_b$. Пусть $\vec{u}_1 = \vec{x}^*$, $\vec{u}_2 = \vec{x}^{\,n}$. Тогда

$$\|\vec{F}(\vec{x}^*) - \vec{F}(\vec{x}^{\,n}) - F'(\vec{x}^{\,n})(\vec{x}^* - \vec{x}^{\,n})\| \leq a_2\|\vec{x}^{\,n} - \vec{x}^*\|^2.$$

Поскольку $\vec{F}(\vec{x}^{\,n}) = -F'(\vec{x}^{\,n})(\vec{x}^{\,n+1} - \vec{x}^{\,n})$, $\vec{F}(\vec{x}^*) = 0$, то

$$\|F'(\vec{x}^{\,n})(\vec{x}^{\,n+1} - \vec{x}^*)\| \leq a_2\|\vec{x}^{\,n} - \vec{x}^*\|^2.$$

Следовательно, имеем:

$$\begin{aligned}
&\|\vec{x}^{n+1}-\vec{x}^*\| = \left\|[F'(\vec{x}^n)]^{-1}\cdot F'(\vec{x}^n)(\vec{x}^{n+1}-\vec{x}^*)\right\| \le \\
&\le \left\|[F'(\vec{x}^n)]^{-1}\right\|\cdot\|F'(\vec{x}^n)(\vec{x}^{n+1}-\vec{x}^*)\| \le \\
&\le a_1a_2\|\vec{x}^n-\vec{x}^*\|^2 = c\|\vec{x}^n-\vec{x}^*\|^2.
\end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Отсюда:

$$\|\vec{x}^{n+1}-\vec{x}^*\| < cb^2 = (cb)b \le b,$$

так как $cb \le 1$, поэтому $\vec{x}^{n+1}\in\Omega_b$. Получаем, что все итерации $\vec{x}^n\in\Omega_b$, так как $\vec{x}^0\in\Omega_b$.

Пусть $q_n = c\|\vec{x}^n-\vec{x}^*\|$. После умножения на c неравенство (1.6.1) примет вид:

$$q_{n+1}\le q_n^2.$$

Следовательно, $q_n \le (q_0)^{2^n}$ и

$$c\|\vec{x}^n-\vec{x}^*\| \le \left(c\|\vec{x}^0-\vec{x}^*\|\right)^{2^n}$$

Теорема доказана.

Мы видим, что итерации сходятся с квадратичной скоростью. Это придает методу Ньютона особую ценность.

Покажем, как избежать обращения матрицы при использовании метода Ньютона:

$$\begin{aligned}
&F'(\vec{x}^n)\cdot(\vec{x}^{n+1}-\vec{x}^n) = -\vec{F}(\vec{x}^n),\\
&\vec{z}^{n+1} = \vec{x}^{n+1}-\vec{x}^n,\\
&F'(\vec{x}^n)\cdot\vec{z}^n = -\vec{F}(\vec{x}^n),\\
&\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n+\vec{z}^n.
\end{aligned}$$

Таким образом, метод Ньютона сведен к решению системы линейных алгебраических уравнений на каждом шаге итераций.

Пример. Пусть

$$
\begin{aligned}
&F_1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1,\\
&F_2(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2,\\
&x_1^0 = 0.5,\\
&x_2^0 = 0.5.
\end{aligned}
$$

Имеем

$$
F'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{pmatrix},
$$

$$
(F'(\vec{x}))^{-1} = \frac{1}{-2x_1 - 4x_1x_2}\begin{pmatrix} -1 & -2x_2 \\ -2x_1 & 2x_1 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \end{pmatrix} - \frac{1}{-2x_1^n - 4x_1^n x_2^n}\begin{pmatrix} -1 & -2x_2^n \\ -2x_1^n & 2x_1^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (x_1^n)^2 + (x_2^n)^2 - 1 \\ (x_1^n)^2 - x_2^n \end{pmatrix}.
$$

1.6.3. Модифицированный метод Ньютона

При использовании модифицированного метода Ньютона по ходу вычислений выбирают или заранее задают некоторую последовательность чисел: $n_0 = 0, n_1, n_2, \ldots$. При $n_k \le n < n_{k+1}$ итерации производят по формуле

$$
\vec{x}^{\,n+1} = \vec{x}^{\,n} - \left(F'(\vec{x}^{\,n_k})\right)^{-1} \vec{F}(\vec{x}^{\,n}).
$$

Увеличение числа итераций, сопровождающее такую модификацию, компенсируется большей "дешевизной"одного шага итерации.

1.6.4. Метод секущих

Для решения одного скалярного уравнения $f(x) = 0$ наряду с методом Ньютона применяют метод секущих. Простейший вариант этого метода заключается в следующем. В процессе итераций фиксируют некоторую точку

x^0. Приближение x^{n+1} находят как абсциссу точки пересечения прямой, проходящей через точки $(x^0, f(x^0))$, $(x^n, f(x^n))$ с осью Ox. При этом

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)(x^n - x^0)}{f(x^n) - f(x^0)}.$$

Более эффективен способ, где за приближение x^{n+1} принимают абсциссу точки пересечения с осью Ox прямой, проходящей через точки $(x^{n-1}, f(x^{n-1}))$, $(x^n, f(x^n))$, при этом

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)(x^n - x^{n-1})}{f(x^n) - f(x^{n-1})}.$$

1.6.5. Задание к лабораторной работе «Численные методы решения систем нелинейных уравнений»

1. Решить аналитически систему уравнений.

2. Решить графически систему уравнений (варианты 1-22) с помощью программы построения графиков функций.

3. Написать программу решения системы уравнений методом Ньютона. В качестве начального приближения брать результаты графического решения. Сравнить результаты аналитического и графического решений.

4. Оформить отчет о лабораторной работе:

1) теоретическая часть;

2) графическое решение системы нелинейных уравнений;

3) текст программы;

4) результаты.

Таблица 1.5. Варианты систем нелинейных уравнений

№ вар.	№ вар.
1	**2**
$x^2 + y^2 - 4 = 0,$ $x - y^2 - 1 = 0$	$x^2 + y^2 - 4 = 0,$ $x^2 - y - 1 = 0$
3	**4**
$(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 - y^2) = 0,$ $x^2 + y^2 - 1 = 0$	$x + y + xy - 7 = 0,$ $x^2 + y^2 + xy - 13 = 0$
5	**6**
$3x^2 + 5xy - 2y^2 - 20 = 0,$ $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0$	$2x^2 + xy - y^2 - 20 = 0,$ $x^2 - 4xy + 7y^2 - 13 = 0$
7	**8**
$x^2 - y^2 + 3y = 0,$ $x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y = 0$	$(x + y)(x^2 - y^2) - 16 = 0,$ $(x - y)(x^2 + y^2) - 40 = 0$
9	**10**
$(x + y)(x + 2y)(x + 3y) - 60 = 0,$ $(y + x)(y + 2x)(y + 3x) - 105 = 0$	$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 136 = 0,$ $x^3y + xy^3 - 30 = 0$
11	**12**
$10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0,$ $3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0$	$x^3 + y^3 - 19 = 0,$ $(xy + 8)(x + y) - 2 = 0$
13	**14**
$x^2y^2 - 2x + y^2 = 0,$ $2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0$	$x^3 + x^3y^3 + y^3 - 17 = 0,$ $x + xy + y - 5 = 0$

Продолжение табл. 1.5.

15	**16**
$(x^2+y^2)(x+y)-15xy=0,$ $(x^4+y^4)(x^2+y^2)-85x^2y^2=0$	$\sqrt{-1-x}-\sqrt{2y-x}-1=0,$ $\sqrt{1-2y}+\sqrt{2y-x}-4=0$
17	**18**
$\log_y x-2\log_x y-1=0,$ $x^2+2y^2-3=0$	$2^{2x}-3^y+17=0,$ $2^x-3^{y/2}+1=0$
19	**20**
$\cos(x-y)-2\cos(x+y)=0,$ $\cos x\cos y-\dfrac{3}{4}=0$	$\log_x y+\log_y x-\dfrac{5}{2}=0,$ $4\sqrt{x}-3\sqrt{y}-1=0$
21	**22**
$\sin x-\sin 2y=0,$ $\cos x-\sin y=0$	$\sin x\cos y-\dfrac{\sqrt{3}}{4}=0,$ $\cos x\sin y-\dfrac{\sqrt{3}}{4}=0$
23	**23**
$x-2y+3z-9=0,$ $x^2+4y^2+9z^2-189=0,$ $3xz-4y^2=0$	$\operatorname{tg} x\operatorname{tg} z-3=0,$ $\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z-6=0,$ $x+y+z-\pi=0$
25	**26**
$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}-3=0,$ $\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}-3=0,$ $x+y+z-3=0$	$(x+y)^2-z^2-4=0,$ $(y+z)^2-x^2-2=0,$ $(z+x)^2-y^2-3=0$

Окончание табл. 1.5.

27	**28**
$xy + yz - 8 = 0,$ $yz + zx - 9 = 0,$ $zx + xy - 5 = 0$	$2x + y + z = 0,$ $3x + 2y + z = 0,$ $3(x+2)^3 + 2(y+1)^3 + (z+1)^3 - 27 = 0$
29	**30**
$x + y + z - 2 = 0,$ $x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0,$ $x^3 + y^3 + z^3 - 8 = 0$	$x - y + z - 6 = 0,$ $x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0,$ $x^3 - y^3 + z^3 - 36 = 0$

Глава 2

Приближение функций

2.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Определение. Интерполяцией называется приближенное или точное нахождение значений какой-либо величины по известным отдельным значениям этой величины или значениям других величин, связанных с данной.

Определение. Интерполяционным многочленом называется многочлен $L_n(x)$ степени n, принимающий значение y_i в узлах x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ (рис. 2.1).

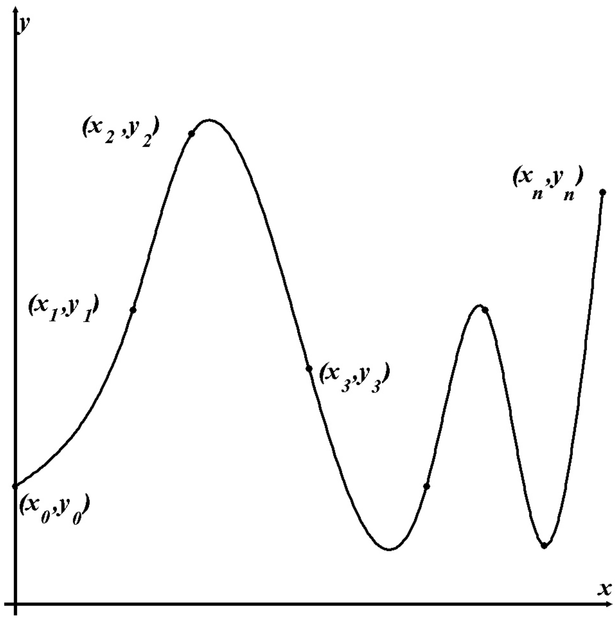

Рис. 2.1.

Пример 1. Пусть $n = 1$. Интерполяционный многочлен проходит через точки (x_0, y_0),(x_1, y_1) и представляет собой прямую линию (рис. 2.2)

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad L_1(x_0) = y_0, \quad L_1(x_1) = y_1.$$

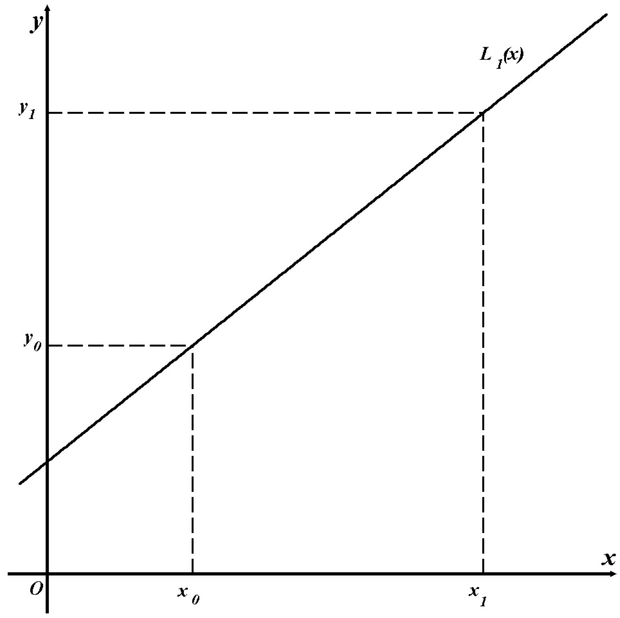

Рис. 2.2.

В общем случае интерполяционный многочлен $n-$ой степени проходит через $(n+1)$ точку (x_0, y_0),(x_1, y_1),...,(x_n, y_n), $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ и имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}.$$

Записанный в таком виде интерполяционный многочлен называют *интерполяционным многочленом Лагранжа.* Интерполяционный многочлен существует и единствен.

Пример 2. Пусть $n = 2$. Интерполяционный многочлен проходит через точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) и представляет собой параболу: (рис. 2.3)

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)},$$

$$L_2(x_0) = y_0, \quad L_2(x_1) = y_1, \quad L_2(x_2) = y_2.$$

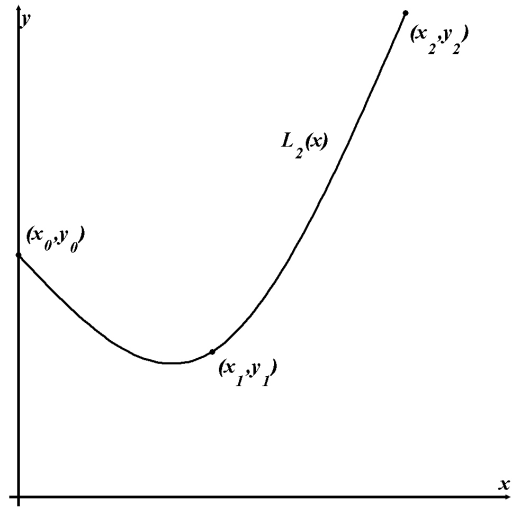

Рис. 2.3.

Оценим *погрешность интерполяционного многочлена Лагранжа.* Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируема $n+1$ раз. Оценим разность $f(x) - L_n(x)$ в фиксированной точке $x \neq x_i$, $i = 0, ..., n$ (рис. 2.4)

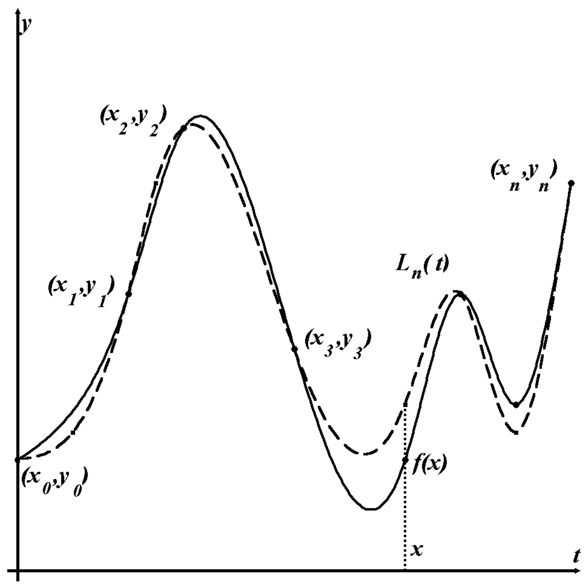

Рис. 2.4.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K\omega_n(t),$$

где K - некоторая константа, $\omega_n(t) = \prod\limits_{i=0}^{n}(t - x_i)$. Функция $\varphi(t) = 0$ в точках $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, так как $f(x_i) = L_n(x_i)$, а $\omega_n(x_i) = 0$, $i = 0, 1, ..., n$.

Выберем константу K таким образом, чтобы $\varphi(x) = 0$. Тогда $f(x) - L_n(x) - K\omega_n(x) = 0$, и $\varphi(x) = 0$ в $n + 2$ точках. Поэтому по теореме Ролля $\varphi'(t) = 0$ в $n + 1$ точках (рис. 2.5).

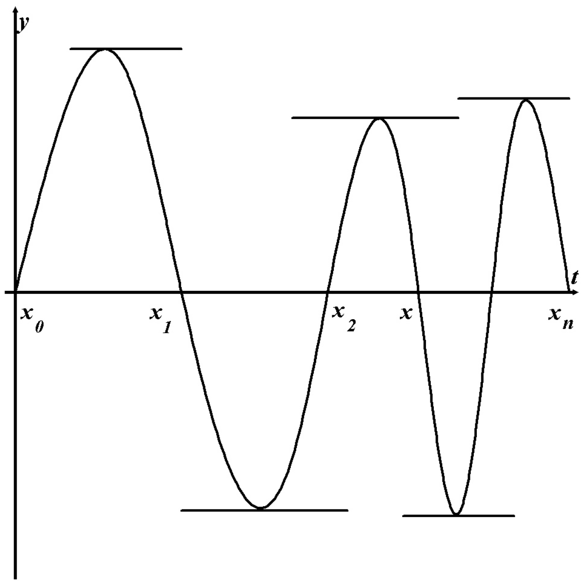

Рис. 2.5.

Аналогично $\varphi''(t) = 0$ в n точках и т.д. Наконец, найдется точка ξ из интервала (x_0, x_n) такая, что $\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{n+1}(\xi) - K(n + 1)! = 0$. Отсюда

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!},$$

поэтому

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x).$$

Получим оценку погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа. Пусть

$$M_n = \max_{\xi \in [x_0, x_n]} |f^{(n)}(\xi)|,$$

тогда

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_n}{(n+1)!}|\omega_n(x)|.$$

Недостатком интерполяции с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа является то, что при небольшом значении n интерполяционный многочлен Лагранжа достаточно хорошо приближает гладкую функцию, а при большом значении n наблюдаются значительные колебания интерполяционного многочлена между узлами интерполяции.

2.2. Интерполирование кубическими сплайнами

Определение. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$. Введем на $[a, b]$ сетку

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b \tag{2.2.1}$$

и обозначим $f_i = f(x_i),\ i = 0, 1, ..., n$. Отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ назовем i-м *частичным* отрезком.

Интерполяционным кубическим сплайном для функции $f(x)$ называется функция $s(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ функция $s(x)$ является многочленом третьей степени;

2) $s(x)$, $s'(x)$ и $s''(x)$ являются непрерывными функциями на отрезке $[a, b]$;

3) выполнены условия *интерполирования*: $s(x_i) = f_i$, $i = 0, 1, ..., n$. (рис. 2.6).

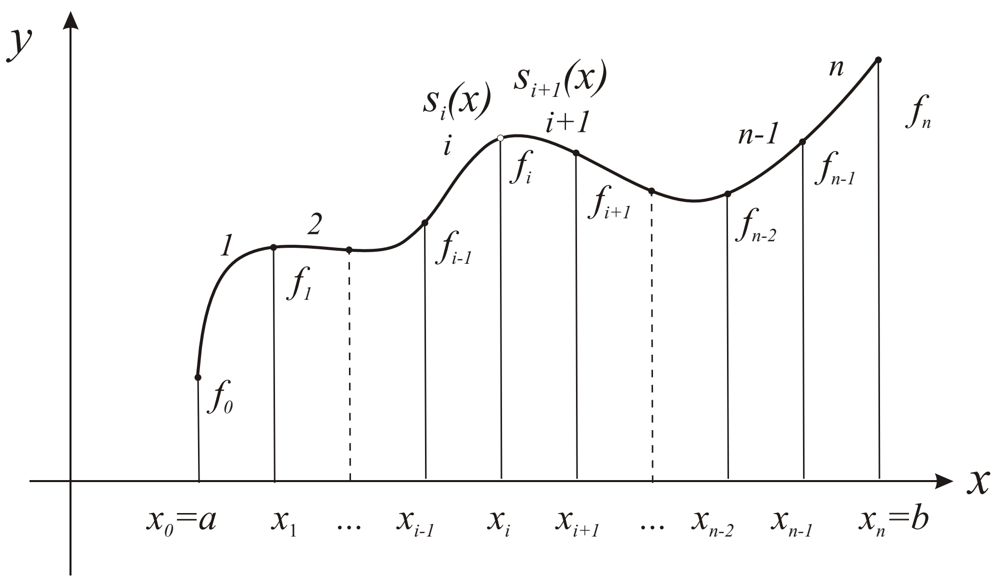

Рис. 2.6.

На каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ сплайн будем искать в виде

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.2.2}$$

При этом из условия непрерывности в узлах сплайна, его первых и вторых производных получаем

$$s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i), \quad i = 1, 2, ..., n-1; \tag{2.2.3}$$

$$s'_i(x_i) = s'_{i+1}(x_i), \quad i = 1, 2, ..., n-1; \tag{2.2.4}$$

$$s''_i(x_i) = s''_{i+1}(x_i), \quad i = 1, 2, ..., n-1. \tag{2.2.5}$$

Кроме условий (2.2.3)—(2.2.5), которые должны выполняться во внутренних узловых точках сетки (2.2.1), на концах отрезка $[a, b]$ потребуем выполнения дополнительных условий :

$$s''_1(x_0) = 0, \quad s''_n(x_n) = 0. \tag{2.2.6}$$

Из (2.2.2) (см. рис. 2.6) имеем $s_i(x_{i-1}) = a_i = f_{i-1}$, $i = 1, 2, ..., n$; и $s_{i+1}(x_i) = a_{i+1} = f_i$, $i = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Отсюда и из (2.2.3) получаем

$$f_{i-1} + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = f_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{2.2.7}$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, ..., n$.

Найдем первую и вторую производные (2.2.2):

$$s'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2,$$

$$s''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, ..., n.$$

Отсюда и из условий (2.2.4) и (2.2.5) следует

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}, \quad i = 1, 2, ..., n-1, \tag{2.2.8}$$

$$2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1}, \quad i = 1, 2, ..., n-1. \tag{2.2.9}$$

Дополнительные условия (2.2.6) приводят к соотношениям

$$c_1 = 0, \quad 2c_n + 6d_n h_n = 0. \tag{2.2.10}$$

Формальное введение еще одного неизвестного c_{n+1}, которое при этом будем считать равным нулю, позволяет из (2.2.9) и второго равенства (2.2.10) получить выражения для коэффициентов d_i сплайна

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i = 1, ..., n. \tag{2.2.11}$$

Из (2.2.7) следует

$$b_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - c_i h_i - d_i h_i^2, \quad i = 1, ..., n.$$

После подстановки d_i в последнее выражение получаем

$$b_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}), \quad i = 1, ..., n. \tag{2.2.12}$$

Подставим (2.2.12) в (2.2.8)

$$\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 =$$
$$= \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{3}(2c_{i+1} + c_{i+2}), \quad i = 1, 2, ..., n-1.$$

Используя (2.2.11), находим

$$\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) + 2c_i h_i + \frac{3(c_{i+1} - c_i)h_i^2}{3h_i} =$$
$$= \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{3}(2c_{i+1} + c_{i+2}), \quad i = 1, 2, ..., n-1.$$

После преобразований получим систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей относительно коэффициентов c_i

$$h_i c_i + 2(h_i + h_{i+1})c_{i+1} + h_{i+1}c_{i+2} = 3\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right), \quad i = 1, 2, ..., n-1; \tag{2.2.13}$$

$$c_1 = 0, \quad c_{n+1} = 0.$$

Замечание. Из условий интерполирования и гладкости сплайна (2.2.3)—(2.2.5) получаются $4n - 2$ уравнения для определения $4n$ коэффициентов $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 1, ..., n$ (см. (2.2.2)). Для получения замкнутой системы уравнений используются те или иные граничные условия, например, условия равенства нулю второй производной сплайна $s(x)$ (2.2.6) (см., например: [5]).

Случай равномерной сетки. Если узлы равноотстоящие, то $h_i = h = \text{const}$,

$h = (b-a)/n$, система (2.2.13) упрощается:

$$c_i + 4c_{i+1} + c_{i+2} = 3\left(\frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}\right), \qquad i = 1, 2, ..., n-1; \tag{2.2.14}$$

$$c_1 = 0, \quad c_{n+1} = 0.$$

Остальные коэффициенты находятся по формулам

$$\begin{aligned} a_i &= f_{i-1}, \\ b_i &= \frac{f_i - f_{i-1}}{h} - \frac{h}{3}(2c_i + c_{i+1}), \\ d_i &= \frac{c_{i+1} - c_i}{3h}, \quad i = 1, ..., n. \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Пусть $s(x)$ – кубический сплайн, построенный для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ с равноотстоящими узлами, т.е. $s(a+ih) = f(a+ih)$, $i = 0, 1, ..., n$. Тогда имеет место следующая теорема [1].

Теорема. Для функции $f(x) \in C^4[a,b]$ справедливы оценки

$$\|f(x) - s(x)\|_{C[a,b]} \le M_4 h^4, \quad \|f'(x) - s'(x)\|_{C[a,b]} \le M_4 h^3,$$

$$\|f''(x) - s''(x)\|_{C[a,b]} \le M_4 h^2, \quad M_4 = \max_{[a,b]} |\, f^{(4)}(x)|.$$

Из этих оценок следует, что при шаге $h \to 0$ (т.е. при $n \to \infty$) последовательности $s^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, 2$, сходятся соответственно к функциям $f^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, 2$.

2.2.1. Задание к лабораторной работе «Интерполирование кубическими сплайнами»

1. Построить таблицу значений $f_i = f(a+ih)$ (табл. 2.1) на отрезке $[a,b]$ с шагом $h = (a-b)/n$.

2. По полученной таблице вычислить коэффициенты сплайна, используя метод прогонки.

3. Вычислить значения сплайна и заданной функции в серединах получившихся отрезков, т.е. в точках $x_{ci} = a + (i - 0.5)h$, $i = 1, 2, .., n$.

4. Вычисления произвести при $n = 5, 25, 125$.

Оформить таблицу, столбцами которой являются:

1) значения $x_{ci} = a + (i - 0.5)h$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$;

2) значения заданной функции $f_{ci} = f(x_{ci})$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$;

3) значения сплайна при $n = 5$

$$s_i = f_{i-1} + \frac{b_i h}{2} + \frac{c_i h^2}{4} + \frac{d_i h^3}{8}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

в серединах получившихся отрезков;

4) значения сплайна при $n = 25$

$$s_i = f_{i-1} + \frac{b_i h}{2} + \frac{c_i h^2}{4} + \frac{d_i h^3}{8}, \quad i = 3 + 5j, j = 0, 1, 2, 3, 4,$$

т.е. в тех же точках, что и при $n = 5$,

5) значения сплайна при $n = 125$

$$s_i = f_{i-1} + \frac{b_i h}{2} + \frac{c_i h^2}{4} + \frac{d_i h^3}{8}, \quad i = 13 + 5j, j = 0, 1, 2, 3, 4,$$

т.е. в тех же точках, что и при $n = 5$.

Убедиться, что при увеличении n качество сплайн-интерполяции повышается.

Таблица 2.1. Варианты лабораторной работы «Интерполирование кубическими сплайнами»

№ вар.	Функция $f(x)$	Отрезок $[a, b]$
1	$\mathrm{e}^x + \sin x^3$	$[0, 2]$
2	$\ln(2x-1) - \sin x^2$	$[1, 3]$
3	$\mathrm{arctg}(2x+3)$	$[-1, 3]$
4	$\sqrt{x+2} + \mathrm{tg}\, x$	$[-1, 1]$
5	$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$	$[0, \pi]$
6	$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$	$[0, \pi]$
7	$\arcsin(2x-1)$	$[0, 1]$
8	$\mathrm{sh}\, x$	$[0, 2]$
9	$\mathrm{ch}\, x$	$[0, 2]$
10	$\mathrm{th}\, x$	$[0, 2]$
11	$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}$	$[-1, 1]$
12	$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$	$[0, \pi]$
13	$\ln(2x+1) + 2\sin 3x$	$[0, 3]$
14	$\mathrm{e}^{2x} - \cos 2x$	$[0, 3]$
15	$\ln(2x+1) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$	$[0, 5]$

Окончание таблицы 2.1.

№ вар.	Функция $f(x)$	Отрезок $[a,b]$
16	$\dfrac{2x-1}{3x+1}+\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)$	$[0,3]$
17	$\sqrt{2x+1}-\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{6}\right)$	$[0,5]$
18	$\operatorname{sh} x-\cos\left(5x-\dfrac{\pi}{3}\right)$	$[-1,4]$
19	$\sqrt{9x-2}+\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)$	$[1,6]$
20	$\operatorname{arctg}(2x+3)+\cos x^2$	$[-2,3]$
21	$\mathrm{e}^{2x}+\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{4}\right)$	$[-3,3]$
22	$\sin(\cos\sqrt{x+3})$	$[-3,3]$
23	$\sin 2^{5x}$	$[0,1]$
24	$x\sin x^2$	$[0,5]$
25	$\dfrac{\sin 5x}{x}$	$[0,2]$
26	$\cos(\sin x^2)$	$[0,3]$
27	$\sqrt{x+2}+\cos(\sin x^2)$	$[0,3]$
28	$\sqrt{2x-1}+\cos\left(5x+\dfrac{\pi}{6}\right)$	$[1,4]$
29	$\operatorname{arctg}(2x-1)-\sin x^2$	$[0,3]$
30	$\dfrac{2x+1}{3x-1}+\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)$	$[1,3]$

2.3. Метод наименьших квадратов

Пусть известны значения y_i в узлах x_i , $i = 0, 1, 2, ..., n$, $\varphi(a_0, a_1, ..., a_m, x)$ - функция, зависящая от параметров $a_0, a_1, ..., a_m$. Рассмотрим функцию S:

$$S = \sum_{i=0}^{n} (\varphi(a_0, a_1, ..., a_m, x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2.$$

Выберем параметры $a_0, a_1, ..., a_m$ так, чтобы минимизировать S , т.е. сумму квадратов невязок (рис. 2.7).

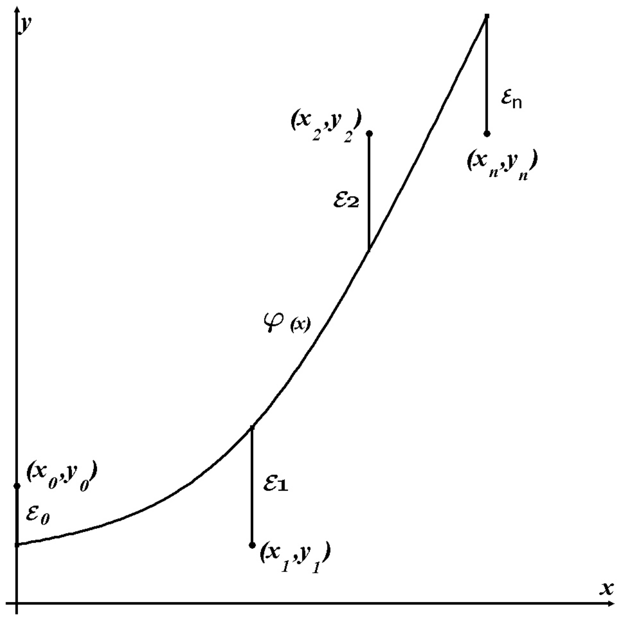

Рис. 2.7.

Отсюда получаем систему уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, ., ..., m. \tag{2.3.1}$$

Эту систему уравнений (часто нелинейную) можно решить методом Ньютона.

Рассмотрим подробнее случай, когда функция $\varphi(x)$ является многочленом степени m:

$$\varphi(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x^1 + a_0.$$

Условие (2.3.1) приводит к следующей СЛАУ

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_m x_i^m + a_{m-1}x_i^{m-1} + ... + a_1 x_i^1 + a_0 - y_i)\cdot 1 = 0,$$
$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_m x_i^m + a_{m-1}x_i^{m-1} + ... + a_1 x_i^1 + a_0 - y_i)x_i = 0,$$
$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_m x_i^m + a_{m-1}x_i^{m-1} + ... + a_1 x_i^1 + a_0 - y_i)x_i^2 = 0,$$
$$...$$
$$\frac{\partial S}{\partial a_m} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_m x_i^m + a_{m-1}x_i^{m-1} + ... + a_1 x_i^1 + a_0 - y_i)x_i^m = 0.$$

Преобразуем ее к виду

$$(n+1)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_2 + ... + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^m\right)a_m = \sum_{i=0}^{n} y_i,$$
$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right)a_2 + ... + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1}\right)a_m = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i,$$
$$...$$
$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^m\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1}\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+2}\right)a_2 + ... + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{2m}\right)a_m = \sum_{i=0}^{n} x_i^m y_i.$$

Введем коэффициенты

$$b_{pq} = \sum_{i=0}^{n} x_i^{p+q}, \quad c_p = \sum_{i=0}^{n} x_i^p y_i.$$

Получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$b_{00}a_0 + b_{01}a_1 + ... + b_{0m}a_m = c_0,$$
$$b_{10}a_0 + b_{11}a_1 + ... + b_{1m}a_m = c_1,$$
$$...$$
$$b_{m0}a_0 + b_{m1}a_1 + ... + b_{mm}a_m = c_m.$$

Эта система решается методом Гаусса.

Пример. Пусть даны точки:

x	-1	0	1	2
y	1	-1	1	4

1. Найдем методом наименьших квадратов прямую $\varphi(x) = a_0 + a_1 x$, на которой минимизируется сумма квадратов невязок. Получаем систему уравнений:

$$4a_0 + 2a_1 = 5,$$
$$2a_0 + 6a_1 = 8.$$

Отсюда $\varphi(x) = 0,7 + 1,1x$ (см. рис. 2.8).

2. Найдем методом наименьших квадратов параболу $\psi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, на которой минимизируется сумма квадратов невязок. Получаем систему уравнений:

$$4a_0 + 2a_1 + 6a_2 = 5,$$
$$2a_0 + 6a_1 + 8a_2 = 8,$$
$$6a_0 + 8a_1 + 18a_2 = 18,$$

Решив ее, найдем, что (рис. 2.9) $\psi(x) = 1,25x^2 - 0,15x - 0,55$.

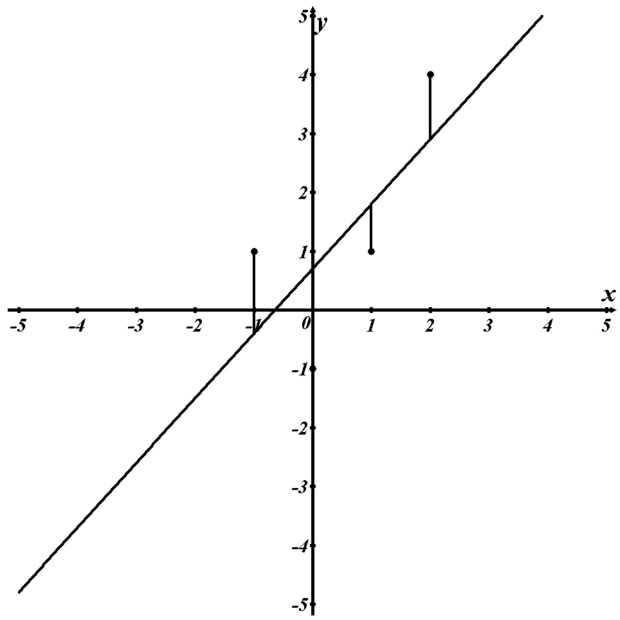

Рис. 2.8.

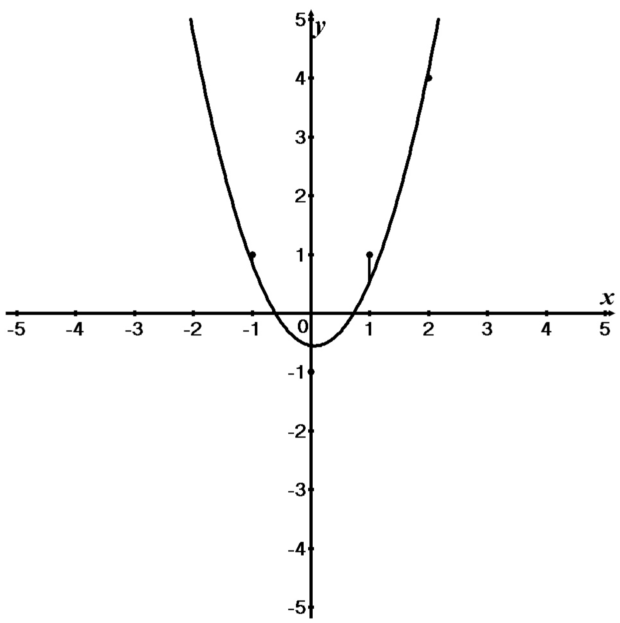

Рис. 2.9.

2.3.1. Задание к лабораторной работе «Метод наименьших квадратов»

1. Написать программу, которая строит таблицу значений $y_i = f(a + ih)$ (по табл. 2.1) на отрезке $[a, b]$ с шагом $h = (b - a)/n$, $n = 10$. По полученной таблице методом наименьших квадратов найти линейную функцию, параболу и кубическую функцию, на которых минимизируется сумма квадратов невязок.

2. Результаты программы оформить в виде таблицы, столбцами которой являются:

1) значения $x_i = a + ih, \quad i = 1, 2, ..., n$;

2) значения заданной функции $y_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, ..., n$;

3) значения получившейся линейной функции $\varphi(x) = a_0 + a_1 x$ в точках $x_i, \quad i = 1, 2, ..., n$;

4) значения получившейся параболы $\psi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ в точках $x_i, \quad i = 1, 2, ..., n$;

5) значения получившейся кубической функции в $\psi_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ точках $x_i, \quad i = 1, 2, ..., n$;

6) три столбца значений невязок для линейной функции, параболы и кубической функции в точках $x_i, \quad i = 1, 2, ..., n$;

7) суммарная невязка в нижней строке для соответствующих столбцов.

Глава 3

Численные методы вычисления определенного интеграла

3.1. Постановка задачи

Требуется вычислить приближенно интеграл

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx$$

где $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция.

3.2. Численные методы вычисления интеграла

3.2.1. Квадратурные формулы

В качестве приближенного значения интеграла I рассматривается число

$$I_n = \sum_{i=0}^{n} q_i \cdot f(x_i), \qquad (3.2.1)$$

где $f(x_i)$ — значения функции $f(x)$ в точках $x = x_i$, $i = 0, 1, ...n$, q_i — числовые коэффициенты. Формула (3.2.1) называется *квадратурной формулой.* Точки x_i называются *узловыми точками* или *узлами* квадратурной формулы, а числа q_i — *весовыми коэффициентами* или *весами* квадратурной формулы. Разность

$$R_n = I - I_n = \int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} q_i \cdot f(x_i)$$

называется *погрешностью* квадратурной формулы. Погрешность зависит как от расположения узлов, так и от выбора весовых коэффициентов.

Говорят, что квадратурная формула *точна* для многочленов степени s, если при замене $f(x)$ на произвольный алгебраический многочлен степени не выше s приближенное равенство $I \approx I_n$ становится точным.

Введем некоторые понятия, которые будут использоваться в дальнейших рассуждениях.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x)$ *принадлежит классу* $C^k[a,b]$, и писать $f \in C^k[a,b]$, если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и имеет на нем непрерывные производные до порядка k включительно.

Определение 2. Пусть $\varphi(h)$ — некоторая функция переменной h с конечной областью определения D_φ на полуоси $h > 0$, причем $h \in D_\varphi$ может принимать сколь угодно малые значения. Тогда, если существуют положительные числа h_0, c, k, такие, что при всех $h \in D_\varphi$, удовлетворяющих условию $0 < h \leqslant h_0$, выполняется неравенство

$$\mid \varphi(h) \mid \leqslant c \cdot h^k,$$

то пишут

$$\varphi(h) = O(h^k)$$

и говорят, что $\varphi(h)$ *есть O большое* от h^k (при $h \to 0$).

Согласно данному определению, выполняются следующие очевидные свойства. Если $\varphi(h) = O(h^k)$, $\psi(h) = O(h^k)$, причем $D_\varphi = D_\psi$, то

$$\varphi(h) + \psi(h) = O(h^k),$$

т.е.

$$O(h^k) + O(h^k) = O(h^k).$$

Если $k > m > 0$, то $O(h^k)$ в то же время есть $O(h^m)$. Наконец, если $\varphi(h) = O(h^k)$, то $\alpha \cdot \varphi(h) = O(h^k)$, где α — постоянная, не зависящая от h.

Рассмотрим наиболее простые квадратурные формулы.

3.2.2. Формула средних прямоугольников

Допустим, что $f \in C^2[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$, $h > 0$. Положим приближенно

$$I = \int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x)dx \approx h \cdot f_0, \tag{3.2.2}$$

где $f_0 = f(0)$. Формула (3.2.2) означает, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, аппроксимируется площадью закрашенного прямоугольника (рис. 3.1,a), высота которого равна значению f_0 функции $f(x)$ в *средней* точке $x = 0$ отрезка $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$. Формула (3.2.2) называется формулой средних прямоугольников.

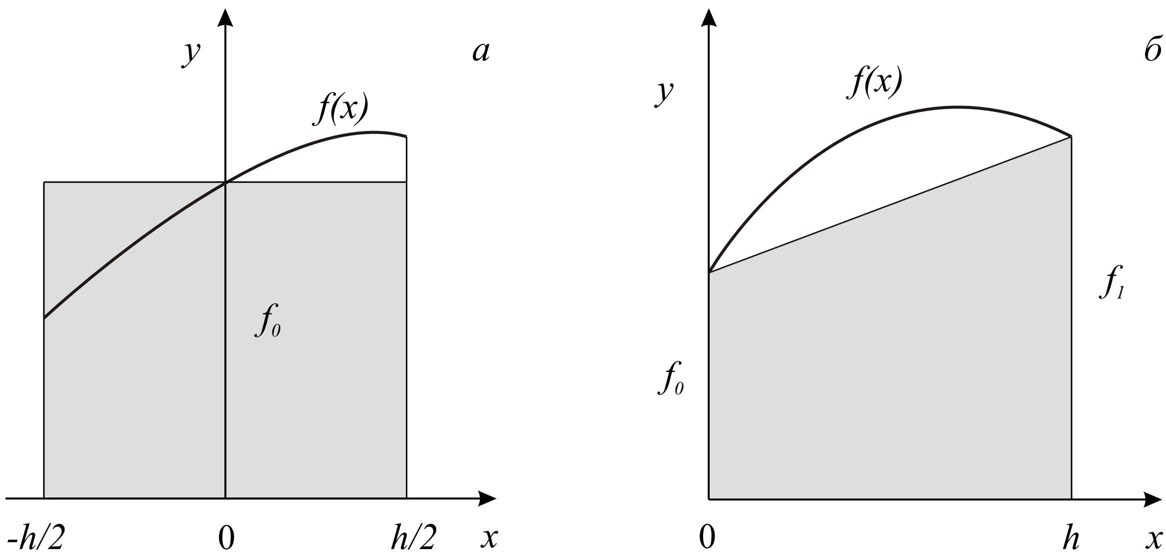

Рис. 3.1.

Получим формулу средних прямоугольников с остаточным членом. Пусть

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt.$$

Так как $F(0) = 0$, $F'(0) = f_0$, $F''(0) = f_0'$, $F'''(x) = f''(x)$, то согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, имеем

$$F(\pm\frac{h}{2}) = F(0) \pm \frac{h}{2}F'(0) + \frac{h^2}{8}F''(0) \pm \frac{h^3}{48}F'''(\xi_\pm)$$

или

$$F(\pm\frac{h}{2}) = \pm\frac{h}{2}f_0 + \frac{h^2}{8}f_0' \pm \frac{h^3}{48}f''(\xi_\pm), \tag{3.2.3}$$

где ξ_-, ξ_+ — некоторые точки, причем $-\frac{h}{2} < \xi_- < 0 < \xi_+ < \frac{h}{2}$.

С учетом (3.2.3) получаем

$$\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x)dx = F\left(\frac{h}{2}\right) - F\left(-\frac{h}{2}\right) = h \cdot f_0 + \frac{h^3}{24} \cdot \frac{f''(\xi_-) + f''(\xi_+)}{2}.$$

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть $f \in C[a, b]$, $\xi_i \in [a, b]$ — произвольные точки, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$[f(\xi_1) + f(\xi_2) + ... + f(\xi_n)]/n = f(\xi).$$

Эта лемма вытекает из очевидных неравенств

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant [f(\xi_1) + f(\xi_2) + ... + f(\xi_n)]/n \leqslant \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

и теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции.

Используя лемму, получаем *формулу средних прямоугольников с остаточным членом*

$$\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x)dx = h \cdot f_0 + \frac{h^3}{24} \cdot f''(\xi), \quad |\, \xi \,| \leqslant \frac{h}{2}.$$

3.2.3. Формула трапеций

Пусть $f \in C^2[0,h]$. Полагаем

$$I = \int\limits_0^h f(x)dx \approx h \cdot \frac{f_0 + f_1}{2}, \tag{3.2.4}$$

где $f_0 = f(0)$, $f_1 = f(h)$. Из формулы (3.2.4) видно, что искомое значение интеграла приближенно заменяется величиной площади закрашенной на рис. (3.1,*б*) трапеции.

Аналогично тому, как это сделано в п. (3.2.2) можно получить *формулу трапеций с остаточным членом*

$$\int\limits_0^h f(x)dx = h \cdot \frac{f_0 + f_1}{2} - \frac{h^3}{12} \cdot f''(\xi), \quad \xi \in [0,h].$$

3.2.4. Формула Симпсона

Предположим, что $f \in C^4[-h,h]$ и требуется вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-h}^h f(x)dx.$$

Значение этого интеграла приближенно заменяем величиной площади закрашенной криволинейной трапеции (рис. 3.2), ограниченной сверху параболой $p(x)$, проходящей через точки $(-h, f_{-1})$, $(0, f_0)$, (h, f_1), где $f_i = f(i \cdot h)$, $i = -1, 0, 1$. Эта парабола задается уравнением

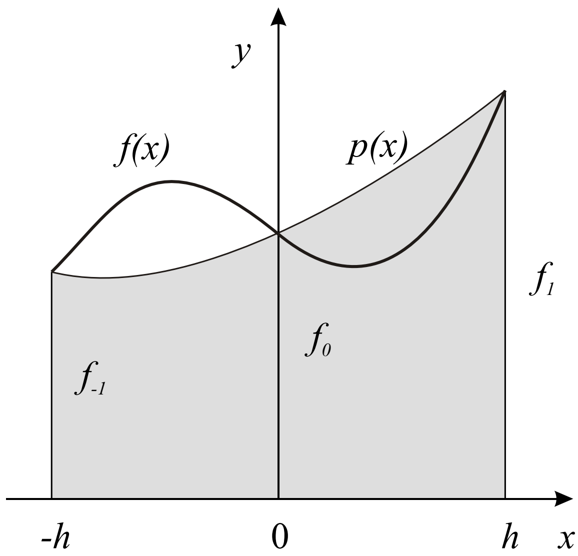

Рис. 3.2.

$$p(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \cdot x + \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{2h^2} \cdot x^2$$

и

$$\int_{-h}^{h} p(x)dx = \frac{h}{3} \cdot (f_{-1} + 4f_0 + f_1).$$

Следовательно

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot (f_{-1} + 4f_0 + f_1). \tag{3.2.5}$$

Формула Симпсона с остаточным членом имеет вид

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \frac{h}{3} \cdot (f_{-1} + 4f_0 + f_1) - \frac{h^5}{90} \cdot f^{(IV)}(\xi), \quad \xi \in [-h, h].$$

Рассмотренные квадратурные формулы средних прямоугольников (3.2.2), трапеций (3.2.4) и Симпсона (3.2.5) назовем *каноническими*.

3.2.5. Составные квадратурные формулы

На практике, если требуется вычислить приближенно интеграл, обычно делят заданный отрезок $[a, b]$ на n равных *частичных* отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, 1, ..., n$; $x_0 = a, x_n = b, h = (b - a)/n$. На каждом частичном отрезке используют каноническую квадратурную формулу и суммируют полученные результаты. При применении формул средних прямоугольников и трапеций длину частичных отрезков удобно принять за h, а при использовании формулы Симпсона — за $2h$. В результате получаются следующие формулы, которые будем называть *составными*.

Составная квадратурная формула средних прямоугольников записывается в виде (рис. 3.3)

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot (f_{c1} + f_{c2} + ... + f_{cn}), \tag{3.2.6}$$

где $h = (b-a)/n$, $f_{ci} = f(x_{ci})$; $x_{ci} = a+(i-1/2)h$, $i = 1, 2, ..., n$ — координаты средних точек частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$.

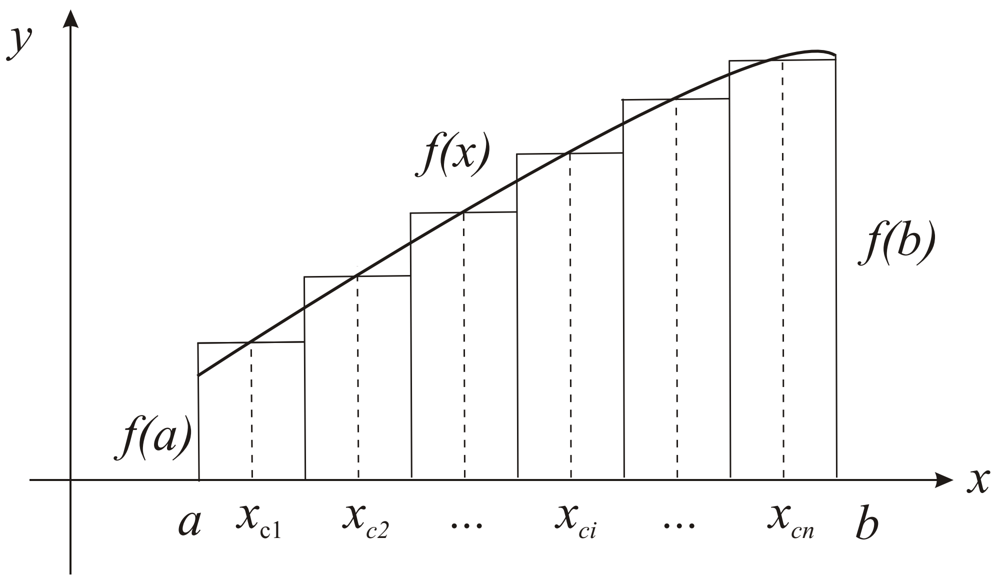

Рис. 3.3.

Погрешность R_n получается в результате суммирования погрешностей по частичным отрезкам

$$R_n = \frac{h^3}{24}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = \frac{h^3}{24}n \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)\right),$$

где $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. В соответствии со сформулированной выше леммой последнее выражение для R_n можно переписать в виде

$$R_n = \frac{h^3}{24} \cdot n \cdot f''(\xi) = h^2 \cdot \frac{(b-a)}{24} \cdot f''(\xi), \;\; \xi \in [a, b].$$

Пусть M — максимальное значение модуля второй производной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, т.е. $M = \max\limits_{x\in[a,b]} \mid f''(x) \mid$; тогда из выражения для R_n получаем следующую оценку:

$$\mid R_n \mid \leqslant h^2 \cdot \frac{(b-a)\cdot M}{24},$$

это означает, что погрешность формулы средних прямоугольников на всем отрезке интегрирования $[a,b]$ есть величина $O(h^2)$ (см. определение 2).

В этом случае говорят, что квадратурная формула имеет *второй порядок точности.*

Замечание. Возможны формулы прямоугольников и при ином, чем в формуле средних прямоугольников, расположении узлов. Например,

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h\cdot f_{x_{i-1}}, \qquad \int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h\cdot f_{x_i}.$$

Однако из-за нарушения симметрии погрешность таких формул является величиной $O(h)$, т.е. порядок точности таких формул на единицу ниже порядка точности формулы средних прямоугольников.

Составная квадратурная формула трапеций имеет вид

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\cdot\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + ... + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right), \tag{3.2.7}$$

где $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + i\cdot h$, $h = (b-a)/n$, $i = 0, 1, ..., n$.

Аналогично предыдущему случаю можно получить выражение для погрешности R_n составной формулы трапеций

$$R_n = -h^2\cdot\frac{(b-a)}{12}\cdot f''(\xi), \;\; \xi\in[a,b].$$

Тогда имеет место оценка

$$\mid R_n \mid \leqslant h^2 \cdot \frac{(b-a)\cdot M}{12}, \;\; M = \max_{x\in[a,b]} \mid f''(x) \mid .$$

Таким образом, формула трапеций (3.2.7) имеет, так же как и формула средних прямоугольников (3.2.6), второй порядок точности ($R_n = O(h^2)$); следует заметить, что ее погрешность оценивается величиной в два раза большей, чем погрешность формулы средних прямоугольников.

Составная квадратурная формула Симпсона записывается так

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot \left(f_0 + f_{2n} + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} \right), \tag{3.2.8}$$

где $f_j = f(x_j)$, $x_j = a + j \cdot h$, $h = (b-a)/(2n)$, $j = 0, 1, ..., 2n$.

Погрешность составной формулы Симпсона имеет вид

$$R_n = -h^4 \cdot \frac{(b-a)}{180} \cdot f^{(IV)}(\xi), \;\; \xi \in [a, b].$$

Отсюда получаем оценку

$$\mid R_n \mid \leqslant h^4 \cdot \frac{(b-a) \cdot M}{180}, \quad M = \max_{x \in [a,b]} \mid f^{(IV)}(x) \mid,$$

т.е. составная формула Симпсона существенно точнее, чем формулы средних прямоугольников и трапеций. Она имеет на отрезке $[a, b]$ четвертый порядок точности ($R_n = O(h^4)$).

Из выражений погрешностей видно, что формулы средних прямоугольников и трапеций точны для многочленов первой степени, т.е. для линейных функций, а формула Симпсона точна для многочленов третьей степени (для них погрешность равна нулю).

3.2.6. Квадратурные формулы Гаусса

Будем считать, что интеграл предварительно приведен к стандартной форме, когда областью интегрирования является отрезок $[-1, 1]$. Итак, пусть требуется вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx.$$

Мы рассматривали до сих пор квадратурные формулы с заданными узлами и убедились, что формулы средних прямоугольников и трапеций точны для многочленов первой степени, а формула Симпсона — для многочленов третьей степени. Пусть мы имеем квадратурную формулу с n *узловыми точками*

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot f(x_i). \tag{3.2.9}$$

Если считать неизвестными не только весовые коэффициенты q_i, но и узлы x_i, то можно потребовать, чтобы квадратурная формула (3.2.9) была точна для полиномов наиболее высокой степени m. Такую формулу называют *квадратурной формулой Гаусса*. При этом оказывается, что $m = 2n - 1$.

Формула (3.2.9) должна быть точна для $f(x) = 1,\ x,\ x^2,\ ...,\ x^{2n-1}$, т.е.

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot x_i^l = \int\limits_{-1}^{1} x^l dx = \left.\frac{x^{l+1}}{l+1}\right|_{-1}^{1} = \frac{1 + (-1)^l}{l+1},$$

где $l = 0,\ 1,\ ...,\ 2n-1$. В результате для узлов x_i и коэффициентов q_i получим следующую систему $2n$ нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + ... + q_n = 2\,, \\ q_1x_1 + q_2x_2 + ... + q_nx_n = 0\,, \\ q_1x_1^2 + q_2x_2^2 + ... + q_nx_n^2 = \dfrac{2}{3}\,, \\ \qquad\qquad \vdots \\ q_1x_1^{2n-1} + q_2x_2^{2n-1} + ... + q_nx_n^{2n-1} = \dfrac{1 + (-1)^{2n-1}}{2n}. \end{cases} \tag{3.2.10}$$

В простейшем случае $n = 1$ систему (3.2.10) можно решить и убедиться, в том, что полученная формула Гаусса совпадает с формулой средних прямоугольников: $I_n = 2 \cdot f(0)$, и что она верна для любой линейной функции $f(x) = c_0 + c_1 x$. В общем случае при произвольном n можно показать (см., например, [4]), что узлами квадратурной формулы Гаусса являются корни *полинома Лежандра* $P_n(x)$, а весовые коэффициенты вычисляются по формуле

$$q_j = \int\limits_{-1}^{1} Q_{n-1,j}(x)dx, \quad j = 1, ..., n; \tag{3.2.11}$$

где подынтегральная функция

$$Q_{n-1,j}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_1)(x_j-x_2)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}.$$

Функция $Q_{n-1,j}(x)$ является полиномом степени $(n-1)$. В числителе у него стоит произведение $(n-1)$-ого множителей $(x - x_i)$, $i = 1, ..., n, i \neq j$; в знаменателе — значение числителя в узле $x = x_j$. Таким образом, полином $Q_{n-1,j}(x)$ в узлах x_i принимает следующие значения

$$Q_{n-1,j}(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Полиномы Лежандра. Они определяются формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{3.2.12}$$

Согласно (3.2.12) $P_0(x)$=1, $P_1(x) = x$. Для последующих значений n можно воспользоваться рекуррентным соотношением

$$nP_n(x) = (2n-1) \cdot x \cdot P_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x).$$

Пользуясь этой формулой, выпишем полиномы Лежандра для $n = 2, 3, 4, 5$:

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,, \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\,,$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\,, \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

Графики полиномов $P_n(x)$ до $n = 5$ представлены на рис. 3.4.

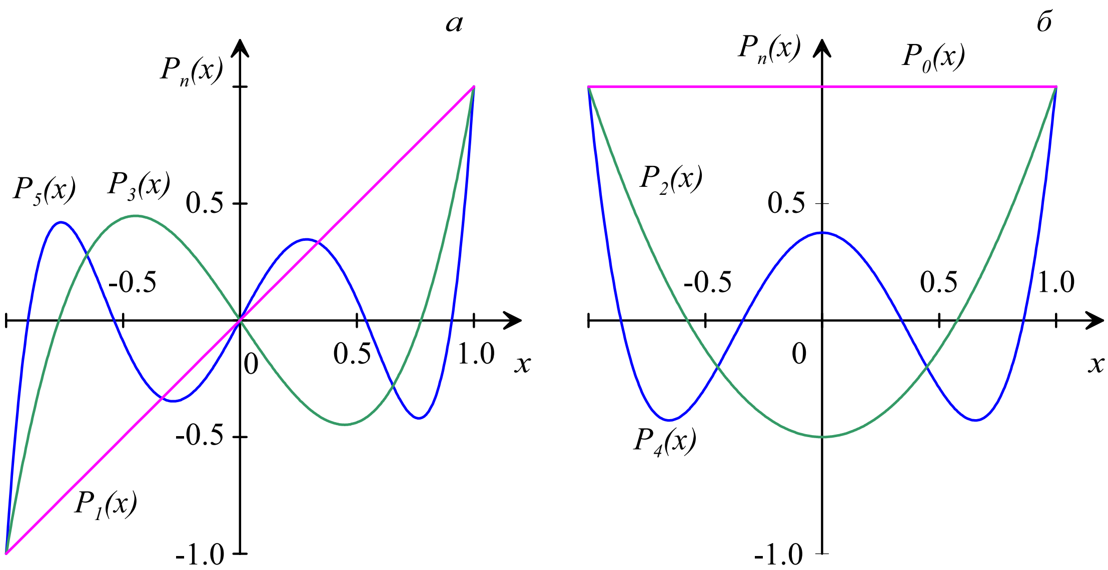

Рис. 3.4.

Полиномы Лежандра с четными номерами являются четными функциями, а с нечетными — нечетными. Полиномы Лежандра $P_n(x)$ в точках $x = \pm 1$ принимают следующие значения: $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$. На интервале $(-1, 1)$ многочлен $P_n(x)$ имеет n простых нулей. В силу четности или нечетности $P_n(x)$ нули полиномов Лежандра располагаются симметрично относительно точки $x = 0$.

Можно показать, что весовые коэффициенты q_j (3.2.11) квадратурной формулы Гаусса положительны (см., например, [3]). Кроме того, в симметричных относительно точки $x = 0$ корнях полинома Лежандра $x_j = -x_{n-(j-1)}$ весовые коэффициенты, соответствующие этим узлам, совпадают при любом n: $q_j = q_{n-(j-1)}$.

Приведем значения корней x_i и соответствующих им весов q_i квадратурных формул Гаусса для $n = 1, ..., 5$:

$$
\begin{aligned}
n = 1: &\quad x_1 = 0, \;\; q_1 = 2; \\
n = 2: &\;\; -x_1 = x_2 = \sqrt{1/3}, \;\; q_1 = q_2 = 1; \\
n = 3: &\;\; -x_1 = x_3 = \sqrt{3/5}, \;\; x_2 = 0, \;\; q_1 = q_3 = 5/9, q_2 = 8/9; \\
n = 4: &\;\; -x_1 = x_4 = \sqrt{(15 + 2\sqrt{30})/35}, \;\; -x_2 = x_3 = \sqrt{(15 - 2\sqrt{30})/35}, \\
&\qquad q_1 = q_4 = (18 - \sqrt{30})/36, \qquad q_2 = q_3 = (18 + \sqrt{30})/36; \\
n = 5: &\;\; -x_1 = x_5 = \sqrt{(35 + 2\sqrt{70})/63}, \;\; -x_2 = x_4 = \sqrt{(35 - 2\sqrt{70})/63}, \\
&\qquad q_1 = q_5 = (322 - 13\sqrt{70})/900, \quad q_2 = q_4 = (322 + 13\sqrt{70})/900, \\
&\qquad x_3 = 0, \;\; q_3 = 128/225.
\end{aligned}
\tag{3.2.13}
$$

Численные значения узлов x_i и весов q_i (3.2.13) с десятью десятичными знаками после запятой приведены в табл. 3.1. На оценке погрешности квадратурных формул Гаусса останавливаться не будем (см., например, [5]).

3.2.7. Правило Рунге практической оценки погрешности

При выводе формулы средних прямоугольников предполагалось, что $f \in C^2[a, b]$. Погрешность этой формулы, выражающаяся через вторую производную $f''(x)$, есть величина $O(h^2)$. Если подынтегральная функция имеет производные более старших порядков, то можно получить более содержательную оценку погрешности.

Если $f \in C^4[a, b]$, то можно получить следующее выражение для

$I = \int\limits_a^b f(x)dx$:

$$I = I_h^{np} + c \cdot h^2 + O(h^4), \tag{3.2.14}$$

где I_h^{np} — значение интеграла, вычисленное по составной формуле средних прямоугольников с шагом h $(h = (b-a)/n)$; c — постоянная, не зависящая от h, $c = \frac{1}{24}\int\limits_a^b f''(x)dx$.

Величина ch^2 в выражении (3.2.14) называется *главной частью погрешности* формулы средних прямоугольников. Может случиться, что $c = 0$. Тогда главная часть погрешности формулы средних прямоугольников является величиной порядка h^4. Но обычно $c \neq 0$.

Если $f \in C^4[a,b]$, то можно получить также соотношение

$$I = I_h^{mp} + c_1 \cdot h^2 + O(h^4), \tag{3.2.15}$$

где I_h^{mp} — приближенное значение интеграла I, найденное по составной формуле трапеций с шагом h; c_1 — постоянная, не зависящая от h, $c_1 = -\frac{1}{12}\int\limits_a^b f''(x)dx$.

Если $f \in C^6[a,b]$, то аналогично выражениям (3.2.14) и (3.2.15) можно получить следующее соотношение

$$I = I_h^{C} + c \cdot h^4 + O(h^6), \tag{3.2.16}$$

где I_h^C — приближенное значение интеграла I, найденное по составной формуле Симпсона; c — некоторая не зависящая от h постоянная.

Правило Рунге. Пусть I_h — приближенное значение интеграла I, найденное по одной из трех рассмотренных составных формул (по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона). Объединим соотношения (3.2.14), (3.2.15) и (3.2.16) в одно:

$$I = I_h + c \cdot h^k + O(h^{k+2}), \tag{3.2.17}$$

где c не зависит от h, k — порядок точности квадратурной формулы ($k = 2$ для составных формул средних прямоугольников и трапеций, $k = 4$ для составной формулы Симпсона). Предполагается, что $f \in C^{k+2}[a,b]$.

На основании формулы (3.2.17) можем записать, что

$$I = I_{h/2} + c \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^k + O(h^{k+2}). \tag{3.2.18}$$

Вычитая равенство (3.2.18) из (3.2.17), находим

$$I_{h/2} - I_h = c \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^k (2^k - 1) + O(h^{k+2}).$$

Отсюда

$$c \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^k = \frac{I_{h/2} - I_h}{2^k - 1} + O(h^{k+2})$$

и, следовательно, согласно формуле (3.2.18), с точностью до $O(h^{k+2})$ имеем

$$I - I_{h/2} \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}. \tag{3.2.19}$$

Вычисление приближенной оценки погрешности по формуле (3.2.19) при выполнении условия (3.2.17), т.е. при возможности представления значения интеграла I в виде (3.2.17), называется *правилом Рунге*.

Вычитая из умноженного на 2^k равенства (3.2.18) равенство (3.2.17), получаем

$$I \cdot (2^k - 1) = 2^k \cdot I_{h/2} - I_h + O(h^{k+2}).$$

Отсюда $I = I_h^* + O(h^{k+2})$, где

$$I_h^* = \frac{2^k \cdot I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}.$$

Число I_h^* называется *уточненным по Ричардсону* приближенным значением интеграла I.

3.3. Задание к лабораторной работе

Для предложенного варианта лабораторной работы интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

вычислите:

1) аналитически,
2) численно с точностью до $\varepsilon = 0.0001$:
   - по формуле средних прямоугольников,
   - по формуле трапеций,
   - по формуле Симпсона.

Точность вычислений определяется с помощью правила Рунге. Точность ε, с которой необходимо найти приближенное значение интеграла, считается достигнутой, когда в процессе вычислений будет выполнено неравенство

$$\frac{| I_{h/2} - I_h |}{2^k - 1} < \varepsilon.$$

Алгоритм вычислений с использованием правила Рунге. Приближенное вычисление интеграла с заданной точностью ε проводим *методом итераций*. На l-той итерации вычисляем значение $I_l = I_h$ интеграла I по одной из трех требуемых составных формул приближенного вычисления интегралов с шагом h_l, затем находим значение $I_{l+1} = I_{h/2}$ по той же составной формуле, но с шагом $h_{l+1}=h_l/2$. Если для найденных значений I_l и I_{l+1} выполняется неравенство

$$\frac{| I_{l+1} - I_l |}{2^k - 1} < \varepsilon, \tag{3.3.1}$$

то точность считается достигнутой. В противном случае проводим следующую итерацию: I_l присваиваем значение I_{l+1}, увеличиваем в два раза число разбиений n, находим новое значение I_{l+1} и опять проверяем выполнение условия (3.3.1).

При вычислении начального приближения I_0 (для $l = 0$) в качестве шага h_0 можно взять значение $h_0 \approx \sqrt[k]{\varepsilon}$. Однако, при этом, соответствующее значению h_0 первоначальное число разбиений n_0, если его определять по формуле $n_0 = (b-a)/h_0$, скорее всего окажется не целым числом. Число разбиений n по своему смыслу на каждой итерации l должно быть целым, поэтому вначале надо задавать число разбиений, а затем вычислять шаг, соответствующий данному числу разбиений. Это можно сделать следующим образом:

$$n_0 = \left[\frac{b-a}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1, \quad h_0 = \frac{b-a}{n_0} \tag{3.3.2}$$

для формул средних прямоугольников и трапеции;

$$n_0 = \left[\frac{b-a}{2\sqrt[4]{\varepsilon}}\right] + 1, \quad h_0 = \frac{b-a}{2n_0} \tag{3.3.3}$$

для формулы Симпсона.

В этих формулах квадратные скобки [ ] обозначают целую часть заключенного в них числа.

3) дайте оценку сверху погрешности вычислений, используя формулы, выражающие R_n через соответствующие производные подынтегральной функции;
4) оцените погрешность как разность между точным значением интеграла и значением, полученным численным методом;
5) сравните между собой погрешности, полученные в п.п. 3 и 4;

6) оформите отчет по лабораторной работе. Отчет должен содержать описание использованного метода, результаты и текст программы.

Варианты лабораторной работы и ответы представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.1. Координаты узловых точек и весовые коэффициенты квадратурной формулы Гаусса

Число узлов n	Номер точки i	Координата точки x_i	Коэффициент q_i
1	1	0	2
2	1	$x_1 = -x_2$	1
	2	0.5773502692	1
3	1	$x_1 = -x_3$	$q_1 = q_3$
	2	0	0.8888888889
	3	0.7745966692	0.5555555556
4	1	$x_1 = -x_4$	$q_1 = q_4$
	2	$x_2 = -x_3$	$q_2 = q_3$
	3	0.3399810436	0.6521451549
	4	0.8611363116	0.3478548451
5	1	$x_1 = -x_5$	$q_1 = q_5$
	2	$x_2 = -x_4$	$q_2 = q_3$
	3	0	0.5688888889
	4	0.5384693101	0.4786286705
	5	0.9061798459	0.2369268851

Таблица 3.2. Варианты лабораторной работы

№ вар.	a	b	Функция $f(x)$	Ответ
1	2	3	4	5
1	0	1	$\mathrm{e}^x + 1$	e
2	0	1	$2^x + 1/\ln 2$	$2/\ln 2$
3	0	1	$3^x + 1/\ln 3$	$3/\ln 3$
4	0.1	$0.1 \cdot \mathrm{e}$	$\ln(10 \cdot x)$	0.1
5	0.2	$0.2 \cdot \mathrm{e}$	$\ln(5 \cdot x)$	0.2
6	1	2	$\mathrm{e}^x + 1/x$	$\mathrm{e}(\mathrm{e} - 1) + \ln 2$
7	0	1	$x \cdot \mathrm{e}^x$	1
8	1	e	$x^2 + 16/x$	$(\mathrm{e}^3 - 1)/3 + 16$
9	0	1	$2x - \mathrm{e}^{-x}$	$1/\mathrm{e}$
10	1	2	$2x + 1/x$	$3 + \ln 2$
11	1	2	$3x^2 + 1/x$	$7 + \ln 2$
12	0	1	$4x^3 - \mathrm{e}^{-x}$	$1/\mathrm{e}$
13	0	1	$2x + \mathrm{e}^x$	e
14	0	1	$1/(1 + x^2)$	$\pi/4$
15	0	1	$1 - 2x\mathrm{e}^{-x^2}$	$1/\mathrm{e}$

Окончание таблицы 3.2.

1	2	3	4	5
16	0	1	$2xe^{x^2}$	$e-1$
17	0	1	$1-xe^{-x}$	$2/e$
18	1	e	$\ln^2 x/x$	$1/3$
19	0	1	$x/(1+x^4)$	$\pi/8$
20	1	2	$e^{1/x}/x^2$	$e-\sqrt{e}$
21	$\ln 2$	$2\ln 2$	$1/(e^x-1)$	$\ln(3/2)$
22	0	$\pi/2$	$\cos^3 x\cdot\sin(2x)$	$2/5$
23	0	$\pi/2$	$(x+\sin x)/(1+\cos x)$	$\pi/2$
24	1	2	$1/(x+x^2)$	$\ln(4/3)$
25	0	$\pi/2$	$e^x\cdot\cos x$	$(e^{\pi/2}-1)/2$
26	0	1	e^{x+e^x}	e^e-e
27	0.5	$0.5\cdot e$	$\ln(2x)$	$1/2$
28	0	1	4^x	$1/\ln 4$
29	0	1	$5^x+1/\ln 5$	$5/\ln 5$
30	0	1	$10^x+1/\ln 10$	$10/\ln 10$

Глава 4

Приближенное вычисление двойного интеграла

4.1. Постановка задачи

Требуется вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy, \tag{4.1.1}$$

где $f(x, y)$ — непрерывная в области D функция двух переменных x и y.

На практике редко удается выразить интеграл через элементарные функции и найти его точное значение. Поэтому обычно для вычисления интегралов применяются методы численного интегрирования. Они основаны на замене подынтегральной функции $f(x, y)$ аппроксимирующими ее функциями, интегралы от которых легко вычисляются в элементарных функциях. В качестве аппроксимирующих функций, например, можно использовать многочлены.

4.2. Численные методы вычисления двойного интеграла

Рассмотрим два способа численного интегрирования: метод ячеек и последовательное интегрирование.

4.2.1. Метод ячеек

Пусть сначала область интегрирования является прямоугольником $D = \{a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant x \leqslant d\}$. Среднее значение $\overline{f}(x,y)$ непрерывной в области D функции $f(x,y)$ по теореме о среднем представляется выражением

$$\overline{f}(x,y) = \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy, \quad S = (b-a)\cdot(d-c). \tag{4.2.1}$$

Считая, что среднее значение приближенно равняется значению функции в центре прямоугольника: $\overline{f}(x,y) \approx f(\overline{x},\overline{y})$, где $\overline{x} = (a+b)/2$, $\overline{y} = (c+d)/2$; из соотношения (4.1.1) получаем простейшую формулу для приближенного вычисления двойного интеграла

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \approx S\cdot f(\overline{x},\overline{y}). \tag{4.2.2}$$

Найдем погрешность формулы (4.2.2). Функцию $f(x,y)$ будем считать достаточно гладкой, т.е. будем полагать, что она имеет все необходимые по ходу рассуждения непрерывные производные. Разложим функцию $f(x,y)$ по формуле Тейлора, выбирая центр прямоугольника (точку $(\overline{x},\overline{y})$) за точку разложения

$$\begin{gathered} f(x,y) = f(\overline{x},\overline{y}) + (x-\overline{x})\cdot f'_x(\overline{x},\overline{y}) + (y-\overline{y})\cdot f'_y(\overline{x},\overline{y}) + \\ +\frac{1}{2}(x-\overline{x})^2\cdot f''_{xx}(\overline{x},\overline{y}) + (x-\overline{x})(y-\overline{y})\cdot f''_{xy}(\overline{x},\overline{y}) + \\ +\frac{1}{2}(y-\overline{y})^2\cdot f''_{yy}(\overline{x},\overline{y}) + \ldots \quad . \end{gathered} \tag{4.2.3}$$

Погрешность есть разность точного и приближенного значений интеграла.

Подставляя в (4.2.2) формулу (4.2.3), получим главный член погрешности

$$R = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,dx\,dy - S \cdot f(\overline{x},\overline{y}) \approx$$
$$\approx \frac{1}{24} \cdot S \cdot [(b-a)^2 \cdot f''_{xx}(\overline{x},\overline{y}) + (d-c)^2 \cdot f''_{yy}(\overline{x},\overline{y})], \tag{4.2.4}$$

где члены, отброшенные при замене точного равенства приближенным, содержат производные старших порядков и более высокие степени длин сторон прямоугольника D. Заметим, что все члены разложения, являющиеся нечетными функциями относительно центра прямоугольника, не вносят вклад в погрешность, поскольку интегралы от этих членов оказываются равными нулю.

В общем случае длины сторон прямоугольника $(b-a)$ и $(d-c)$ не малы, поэтому главный член погрешности (4.2.4) может быть велик. Для повышения точности вычислений в области D (рис. 4.1) вводится сетка $x_i = a + ih_1$, $y_j = a + jh_2$, $i = 0, 1, ..., m$, $j = 0, 1, ..., n$; $h_1 = (b-a)/m$, $h_2 = (c-d)/n$ с достаточно мелкими ячейками $\Delta D_{ij} = \{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j, i = 1, ..., m; j = 1, ..., n\}$.

Вычисляя интеграл по каждой ячейке по формуле (4.2.2) и суммируя найденные значения по всем ячейкам, получаем формулу *метода ячеек*

$$I \approx I_h = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} S_{ij} \cdot f(\overline{x}_i, \overline{y}_j), \tag{4.2.5}$$

где $S_{ij} = h_1 \cdot h_2$ — площадь ячейки, $\overline{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, $\overline{y}_j = (y_{j-1} + y_j)/2$ — координаты центра ячейки. Здесь и далее пусть I_h будет приближенным значением интеграла (4.1.1), вычисленное по формуле (4.2.5) с шагами h_1 и h_2.

Справа в выражении (4.2.5) стоит интегральная сумма, поэтому для любой непрерывной функции $f(x,y)$ эта сумма сходится к значению интеграла,

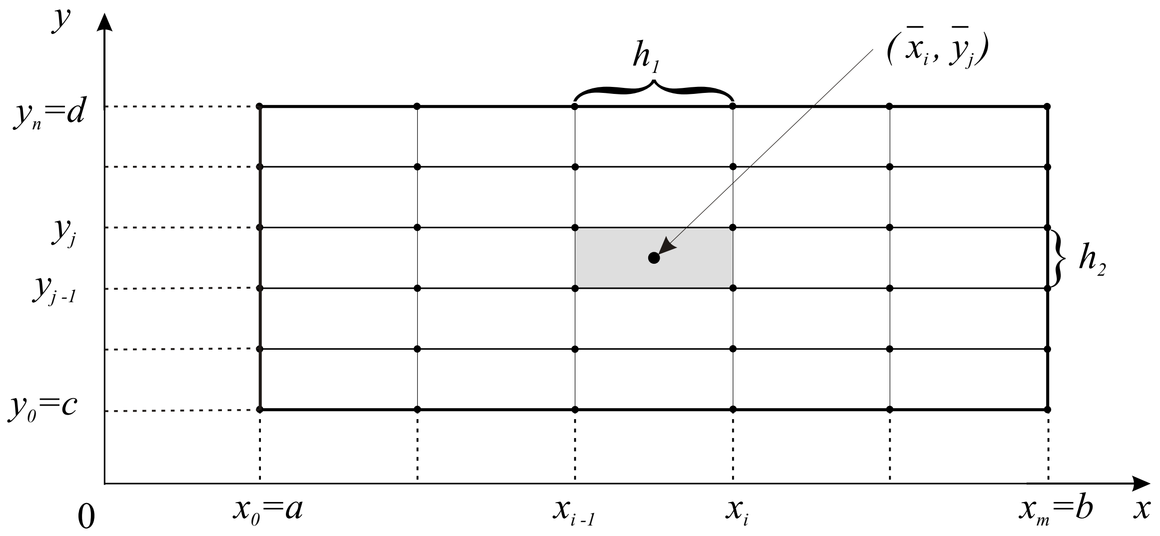

Рис. 4.1.

когда периметры всех ячеек стремятся к нулю.

Погрешность интегрирования (4.2.4) для одной ячейки ΔD_{ij} представляется в виде

$$R_{ij} \approx \frac{1}{24} S_{ij} \left[h_1^2 \cdot f''_{xx}(\overline{x}_i, \overline{y}_j) + h_2^2 \cdot f''_{yy}(\overline{x}_i, \overline{y}_j) \right]. \tag{4.2.6}$$

Суммируя выражения (4.2.6) по всем ячейкам, получаем погрешность метода ячеек

$$R \approx c_1 \cdot h_1^2 + c_2 \cdot h_2^2, \tag{4.2.7}$$

где

$$c_1 = \frac{1}{24} \iint\limits_D f''_{xx}(x,y)\,dx\,dy, \quad c_2 = \frac{1}{24} \iint\limits_D f''_{yy}(x,y)\,dx\,dy$$

или

$$R = O(h_1^2 + h_2^2), \tag{4.2.8}$$

т.е. метод ячеек имеет второй порядок точности относительно шагов сетки h_1 и h_2.

Заметим, что поскольку в оценке (4.2.6) отброшены более высокие степени h_1 и h_2, то соотношение для погрешности (4.2.7) является асимптотическим, т.е. выполняется при $h_1 \to 0$ и $h_2 \to 0$ с точностью до членов более высокого порядка малости по h_1 и h_2.

Для вычисления интеграла (4.1.1) с заданной точностью можно воспользоваться, как это следует из (4.2.8), правилом Рунге практической оценки погрешности. С помощью разложения $f(x, y)$ в окрестности центра каждой ячейки по формуле Тейлора до членов с производными четвертого порядка можно получить оценку не только главного члена погрешности (4.2.8), но и оценить следующие по порядку малости h_1 и h_2 члены погрешности. Заметим, что члены в разложении $f(x, y)$ по формуле Тейлора, содержащие производные третьего порядка, в силу симметрии области интегрирования ΔD_{ij} относительно точки разложения не вносят вклад в погрешность интегрирования. Поэтому, для того чтобы учесть следующие после главного члена по порядку малости h_1 и h_2 члены погрешности, необходимо разлагать $f(x, y)$ до членов, содержащих производные четвертого порядка. В результате интеграл (4.1.1) можно представить в виде

$$I = I_h + c_1 \cdot h_1^2 + c_2 \cdot h_2^2 + O(h_1^4 + h_1^2 \cdot h_2^2 + h_2^4). \tag{4.2.9}$$

Выражения для c_1 и c_2 были приведены выше (см. формулу (4.2.7)). Здесь важно подчеркнуть, что c_1 и c_2 — не зависящие от h_1 и h_2 постоянные величины, причем они не должны одновременно обращаться в 0.

Таким образом, если известен главный член погрешности, то можно увеличить точность вычисления интеграла (4.1.1)

$$I \approx I_h + c_1 \cdot h_1^2 + c_2 \cdot h_2^2. \tag{4.2.10}$$

Однако постоянные c_1 и c_2 являются неизвестными величинами. Для того, чтобы вычислить интеграл (4.1.1) с учетом главного члена погрешности, можно поступить следующим образом. Сначала находим значение I_h, затем — значение $I_{h/2}$. Здесь $I_{h/2}$ — значение интеграла (4.1.1), вычисленное по формуле (4.2.5) с шагами $h_1/2$ и $h_2/2$. Теперь, наряду с выражением (4.2.10), можно написать соотношение

$$I \approx I_{h/2} + c_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + c_2 \cdot \left(\frac{h_2}{2}\right)^2. \tag{4.2.11}$$

Тот факт, что сетка по каждой переменной x и y сгущается в одинаковое число раз, позволяет в выражении (4.2.10) выделить главный член погрешности $[c_1 \cdot (h_1/2)^2 + c_2 \cdot (h_2/2)^2]$ формулы (4.2.11):

$$I \approx I_h + 4\left[c_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + c_2 \cdot \left(\frac{h_2}{2}\right)^2\right]. \tag{4.2.12}$$

Из выражений (4.2.11) и (4.2.12) следует, что

$$I_h + 4\left[c_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + c_2 \cdot \left(\frac{h_2}{2}\right)^2\right] \approx I_{h/2} + \left[c_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + c_2 \cdot \left(\frac{h_2}{2}\right)^2\right].$$

Из этого соотношения получаем выражение для главного члена погрешности формулы (4.2.11)

$$c_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + c_2 \cdot \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{3}. \tag{4.2.13}$$

Теперь, согласно формуле (4.2.11), имеем приближенную оценку погрешности по правилу Рунге

$$I - I_{h/2} \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{3}. \tag{4.2.14}$$

Наконец, подставляя выражение (4.2.13) в (4.2.11), получаем значение интеграла (4.1.1) с учетом главного члена погрешности, т.е.

$$I \approx I_h^* = \frac{4 \cdot I_{h/2} - I_h}{3},$$

где I_h^* — уточненное по Ричардсону значение интеграла I.

Замечания. 1. Подчеркнем, что для практической оценки погрешности по правилу Рунге сетка по каждой переменной сгущается в одинаковое число раз, т.е. отношение m/n при сгущении сетки должно оставаться постоянным. В противном случае не удается в результате двойного пересчета интеграла (4.1.1) по двум сеткам с разными размерами ячеек составить формулы типа (4.2.10) и (4.2.11), из которых можно найти главный член погрешности.

2. Понятно, что если одновременно $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$, то для оценки погрешности вычисления интеграла (4.1.1) правило Рунге в виде (4.2.14) неприменимо.

Мы получили формулу (4.2.5) для вычисления интеграла в простейшем случае — для прямоугольной области. Если область не прямоугольная, то в ряде случаев исходный интеграл по такой области соответствующей заменой переменных удобно преобразовать к двойному интегралу по прямоугольной области. Например, если область задана в виде криволинейного четырехугольника $D = \{a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$ (рис. 4.2,*а*), то с помощью замены переменных $x = x(u) = (b-a)u + a$, $y = \varphi_1(x(u)) + v \cdot (\varphi_2(x(u)) - \varphi_1(x(u)))$ исходная область D преобразуется в квадратную область $D' = \{0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1\}$ (рис. 4.2,*б*)

Напомним правило замены переменных в двойном интеграле. Если ограниченная замкнутая область D в плоскости Oxy взаимно однозначно отображается на область D' на плоскости Ouv с помощью непрерывно дифференцируемых функций $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, причем якобиан преобразования

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

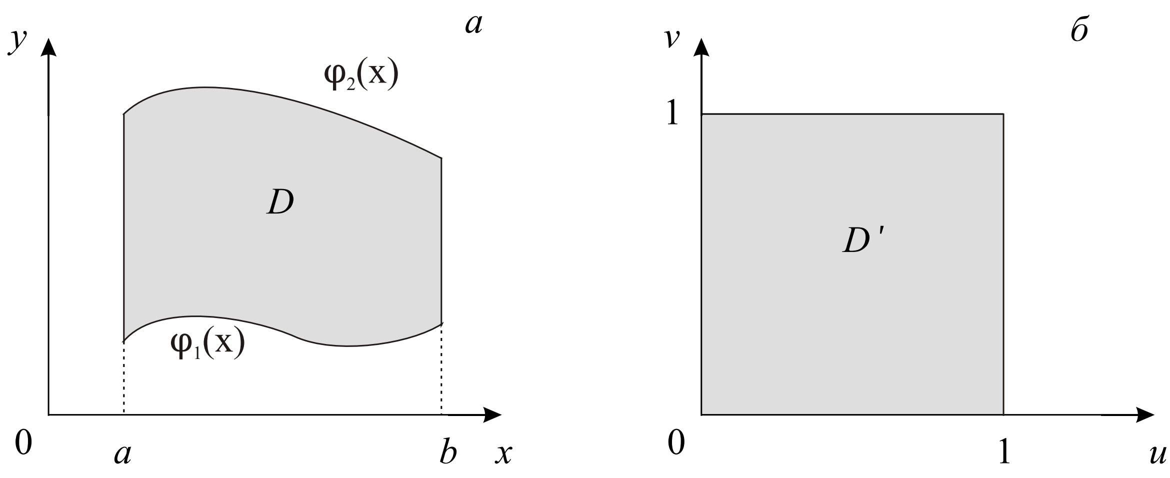

Рис. 4.2.

то справедлива формула

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \mid J \mid du\, dv.$$

Методом ячеек можно вычислить интеграл и по области сложной формы, например, с криволинейной границей (рис. 4.3).

Интеграл в этом случае будем вычислять следующим образом. Наложим на область D прямоугольную сетку, и в интегральную сумму (4.2.5) будем включать только те ячейки, все точки которых принадлежат области D. В итоге на порядок понижается точность формулы (4.2.5), поэтому для вычисления интеграла с достаточной точностью требуется сетка с более мелкими ячейками.

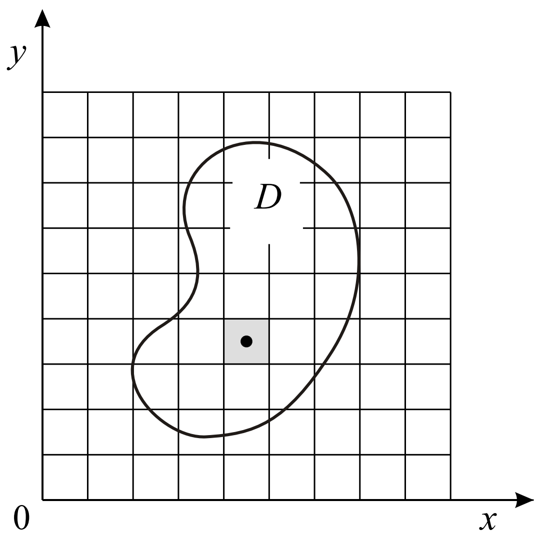

Рис. 4.3.

Следует отметить, что метод ячеек (4.2.5) легко переносится на большее число измерений (для вычисления тройных и большей кратности интегралов). В случае однократного интеграла аналогом метода ячеек является метод средних прямоугольников (3.2.6), рассмотренный в гл. 3.

4.2.2. Последовательное интегрирование с использованием формулы трапеций

Другой метод вычисления двойных интегралов — их сведение к последовательному вычислению однократных интегралов. Снова рассмотрим интеграл по прямоугольной области $D = \{a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant x \leqslant d\}$ (рис. 4.4). Интеграл (4.1.1) можно вычислить последовательным интегрированием

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy. \tag{4.2.15}$$

Это выражение перепишем в виде

$$I = \int\limits_c^d F(y)\,dy, \quad F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx. \tag{4.2.16}$$

Для вычисления этих интегралов могут быть использованы известные формулы из гл. 3. Например, пусть и по направлению x, и по направлению y для приближенного вычисления применяется формула трапеций (3.2.7). Тогда

$$F(y_j) \approx h_1 \cdot \sum_{i=0}^{m} q_{1,i} \cdot f(x_i, y_j), \tag{4.2.17}$$

где

$$q_{1,i} = \begin{cases} 1/2 & \text{при} \;\; i = 0 \;\; \text{и} \;\; i = m, \\ \;1 & \text{при} \;\; i = 1, 2, ..., m-1. \end{cases}$$

и

$$I \approx h_2 \cdot \sum_{j=0}^{n} q_{2,j} \cdot F(y_j), \tag{4.2.18}$$

где

$$q_{2,j} = \begin{cases} 1/2 & \text{при} \quad j = 0 \text{ и } j = n, \\ 1 & \text{при} \quad j = 1, 2, ..., n-1. \end{cases}$$

Подставляя выражение (4.2.17) в (4.2.18), получаем формулу последовательного интегрирования

$$I \approx I_h = h_1 \cdot h_2 \cdot \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} q_{ij} \cdot f(x_i, y_j), \tag{4.2.19}$$

где

$$q_{ij} = q_{1,i} \cdot q_{2,j} = \begin{cases} 1/4 & \text{при} \quad i = 0, m; \;\; j = 0, n; \\ 1/2 & \text{при} \quad \begin{cases} i = 0 \text{ и } i = m, \;\; j = 1, ..., n-1, \\ j = 0 \text{ и } j = n, \;\; i = 1, ..., m-1; \end{cases} \\ 1 & \text{при} \quad i = 1, ..., m-1, \;\; j = 1, ..., n-1. \end{cases}$$

На рис. 4.4 приведена сетка, которая используется при приближенном вычислении интеграла (4.1.1) по формуле (4.2.19). Точками, кружочками и квадратиками показаны узловые точки, в которых коэффициенты $q_{ij} = 1, \; 1/2$ и $1/4$, соответственно.

Легко убедиться в том, что для дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x, y)$ формула (4.2.19) имеет второй порядок точности относительно шагов h_1 и h_2 и что можно применить правило Рунге практической оценки погрешности.

Замечание. Если в методе последовательного интегрирования воспользуемся формулой средних прямоугольников при интегрировании по каждому из направлений x и y, то в результате получим расчетную формулу метода ячеек (4.2.5).

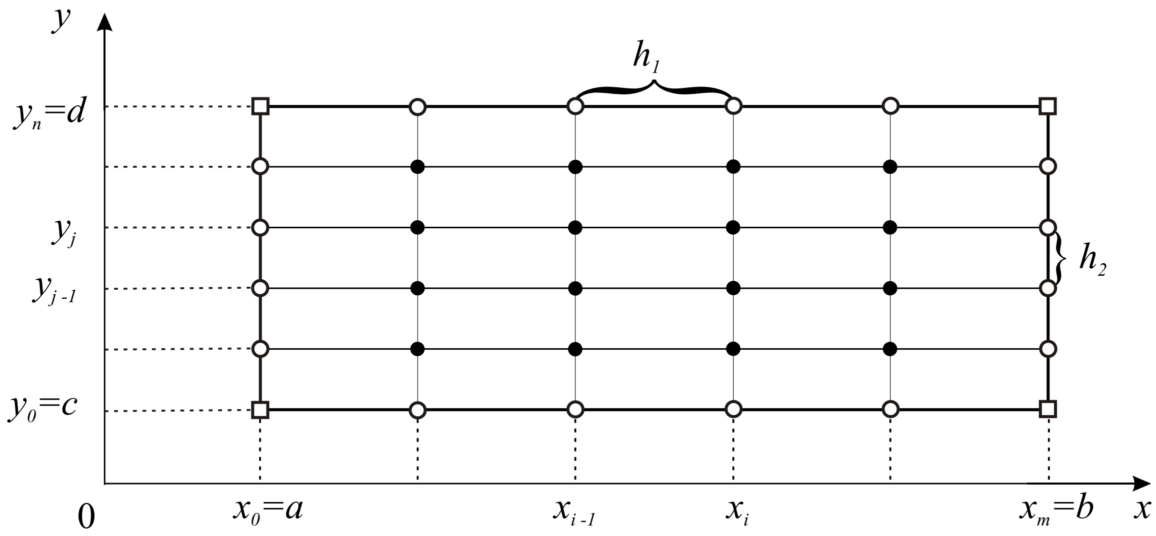

Рис. 4.4.

Случай сложной области. Метод последовательного интегрирования можно непосредственно применять и к области произвольной формы, например с криволинейной границей (см. рис. 4.3). Однако для получения простых расчетных формул на практике всегда стараются свести исходный интеграл к сумме интегралов по прямоугольным областям.

4.2.3. Последовательное интегрирование с использованием квадратурных формул Гаусса

Для получения квадратурной формулы более высокой точности, чем формулы (4.2.19) можно воспользоваться квадратурными формулами Гаусса. При этом предварительно заменой переменных $x(u) = (a + b)/2 + u \cdot (b - a)/2$, $y(v) = (c+d)/2+v \cdot (d-c)/2$ прямоугольная область $\{a \leqslant x \leqslant b,\, c \leqslant x \leqslant d\}$ преобразуется в квадратную область $D = \{-1 \leqslant u \leqslant 1,\ -1 \leqslant v \leqslant 1\}$. Поэтому будем считать, что с самого начала требуется вычислить интеграл по области $D = \{-1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$:

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f(x,y)\,dxdy. \tag{4.2.20}$$

Применяя для интегрирования (4.2.20) и по направлению x, и по направлению y квадратурную формулу Гаусса с *одинаковым* числом узлов, получаем следующую формулу последовательного интегрирования

$$I_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i \cdot q_j \cdot f(x_i, y_j). \tag{4.2.21}$$

Значения координат узловых точек и весовых коэффициентов по направлениям x и y берутся из табл. 3.1. Расположение узловых точек для $n = 3$ и $n = 4$ проиллюстрировано на рис. 4.5,*а* и рис. 4.5,*б*, соответственно:

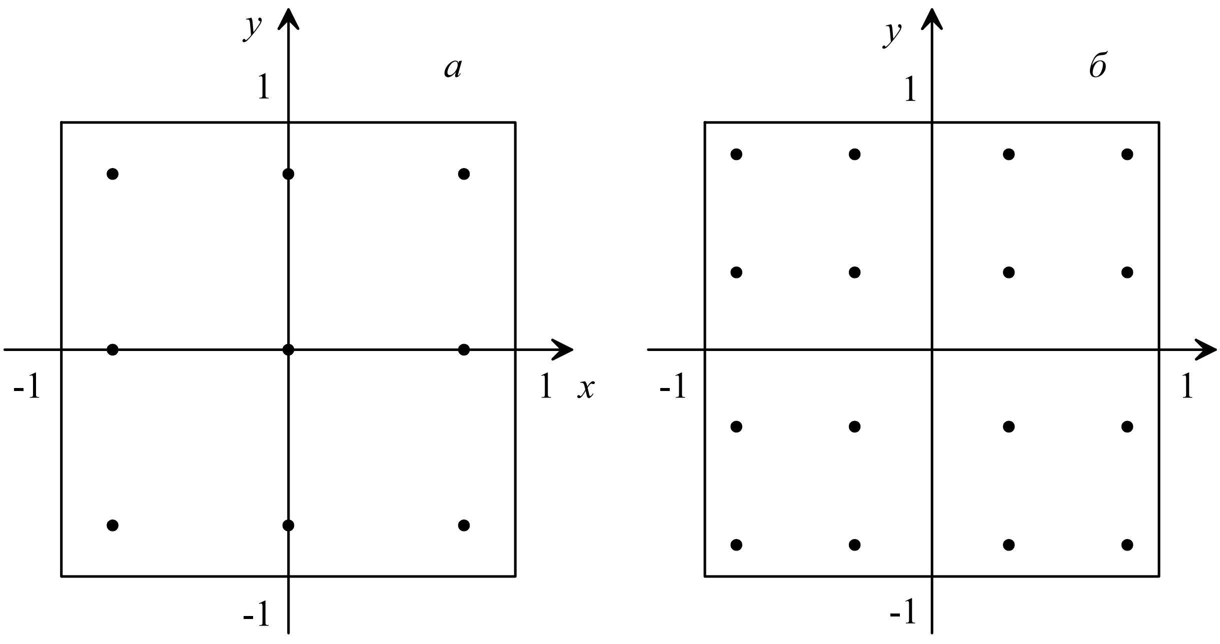

Рис. 4.5.

4.3. Задание к лабораторной работе

Для предложенного варианта лабораторной работы вычислите двойной интеграл по области D, где D — криволинейный четырехугольник $\{a \leqslant x \leqslant b,$ $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$:

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Интегралы вычислите:

1) аналитически,
2) численно с точностью до $\varepsilon = 0.0001$:
   - методом ячеек,
   - последовательным интегрированием с использованием формулы трапеций для интегрирования по направлениям x и y.

При численном решении область D предварительно отобразите в квадрат D' (см. рис. 4.2). Для оценки погрешности воспользуйтесь правилом Рунге.

Оформите отчет. Он должен содержать: постановку задачи и описание методов ее решения, текст программы, результаты расчетов.

Указание. Результаты расчетов вывести на печать с пятью значащими цифрами после запятой. На основе сравнения приближенных значений интеграла, вычисленных методом ячеек и последовательным интегрированием, с точным убедиться в том, что приближенные значения вычислены с заданной точностью. На печать вывести значения числа итераций l, шагов h_1 и h_2, а также чисел разбиений m и n, позволившие достигнуть заданной точности вычисления: а) методом ячеек, б) последовательным интегрированием.

Варианты лабораторной работы и ответы представлены в табл. 4.1 и 4.2

Таблица 4.1. Варианты лабораторной работы

№	Область D				Функция
вар.	a	b	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$f(x)$
1	2	3	4	5	6
1	0	1	x^2	$1+x$	$x \cdot y^2$
2	1	2	0	$1+\ln x$	e^y
3	0	$\pi/3$	0	$\cos x$	$\sin x/(1+y)$
4	1	e	$x-2$	$\ln x$	y/x
5	1	2	0	x	$x^2 \cdot \sqrt{1+x \cdot y}$
6	0	1	x^2	$1+x$	$x^2 \cdot y$
7	1	2	$\ln x$	$1+\ln x$	e^y
8	$\pi/6$	$\pi/2$	0	$\sin x$	$\cos x/(1+y)$
9	1	2	x	$2x$	$x \cdot \ln(x \cdot y)$
10	1	e	$\ln x$	x	y/x
11	1	2	0	$3-x$	$x+y^2$
12	1	2	$\ln x$	$1+\ln x$	e^{x+y}
13	0	$\pi/3$	0	$1/\cos x$	$y \cdot \mathrm{tg}\, x$
14	1	2	0	x	$4x^2 \cdot \ln(1+x \cdot y)$
15	1	2	0	$\sqrt{x}$	$2x^2 \cdot y \cdot \sqrt{1+x \cdot y^2}$

Окончание таблицы 4.1.

1	2	3	4	5	6
16	0	1	0	$1+x$	$-x+y^2$
17	0	1	$\ln(1+x)$	$1+2\ln(1+x)$	$\mathrm{e}^{x+y}/(1+x)$
18	$\pi/6$	$\pi/2$	0	$1/\sin x$	$y\cdot\operatorname{ctg} x$
19	1	3	x	$2x$	$\ln(y/x)$
20	1	2	0	$1/x$	$x\cdot\sqrt{1+x\cdot y}$
21	0	1	0	$1+x$	$x+y^2$
22	$1/4$	1	0	$\sqrt{x}$	$x\cdot\sqrt{x}\cdot\mathrm{e}^{x\cdot y}$
23	0	1	0	e^x	$(x+x^2)\mathrm{e}^x\cos\left(\dfrac{\pi}{3\mathrm{e}}xy\right)$
24	1	2	$1-x$	x	$\ln(x+y)/x$
25	1	$\sqrt{3}$	0	x^2	$1/[(1+x^2)(1+y)\cdot\sqrt{y}]$
26	1	2	$x/2$	x	$x/(x^2+y^2)$
27	1	2	x	$2x^2$	$2\mathrm{e}^{y/x}$
28	$\pi/3$	$\pi/2$	0	x	$\cos(x+y)$
29	1	2	0	$\sqrt{x}$	$8x^2y\ln(1+x\cdot y^2)$
30	1	3	0	x	$1/\sqrt{1+\mathrm{e}^{2y/x}}$

Таблица 4.2. Ответы лабораторной работы

№ вар.	Ответ	№ вар.	Ответ
1	$93/120$	16	$5/12$
2	$3\mathrm{e}/2-1$	17	$\mathrm{e}^2-\mathrm{e}+1$
3	$2\ln 2-1.5\ln(1.5)-0.5$	18	0.75
4	$(-3\mathrm{e}^2+24\mathrm{e}-43)/12$	19	$4\cdot(2\ln 2-1)$
5	$\dfrac{10\sqrt{5}}{3}-\dfrac{8\sqrt{2}}{15}-1$	20	$[2\cdot(2\sqrt{2}-1)]/3$
6	$187/420$	21	$2\dfrac{1}{12}$
7	$1.5\cdot(\mathrm{e}-1)$	22	$[2\cdot(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{1/8}-7/8)]/3$
8	$2\ln 2-1.5\ln(1.5)-0.5$	23	$(9\cdot\mathrm{e}^2)/(2\cdot\pi^2)$
9	$10\ln 2-3\dfrac{8}{9}$	24	$7\ln 2-4$
10	$(3\mathrm{e}^2-5)/12$	25	$(7\pi^2)/144$
11	$3\dfrac{5}{12}$	26	$\pi/4-\mathrm{arctg}(1/2)$
12	$\mathrm{e}^2(\mathrm{e}-1)$	27	$\mathrm{e}\cdot(3\mathrm{e}^3-\mathrm{e}-6)/2$
13	0.75	28	-0.25
14	$25\ln 5-4\ln 2-25.5$	29	$25\ln 5-4\ln 2-25.5$
15	$\dfrac{10\sqrt{5}}{3}-\dfrac{8\sqrt{2}}{15}-1$	30	$4\cdot\ln\left(\dfrac{(1+\sqrt{2})\mathrm{e}}{1+\sqrt{1+\mathrm{e}^2}}\right)$

Глава 5

Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

5.1. Постановка задачи

Требуется найти решение $u(x)$ задачи Коши

$$u' = f(x,u), \;\; u(x_0) = u_0, \tag{5.1.1}$$

где $u' = du/dx$, x_0 и u_0 — заданные числа.

Из курса дифференциальных уравнений известно, что если функция $f(x,u)$ непрерывна в замкнутой прямоугольной области $G = \{|x-x_0| \leqslant A, |u-u_0| \leqslant B\}$ и удовлетворяет в этой области условию Липшица по аргументу u, то можно указать отрезок $|x - x_0| \leqslant \delta$, на котором задача Коши (5.1.1) имеет единственное решение. Если вдобавок функция $f(x,u)$ имеет непрерывные производные по обоим аргументам до k-ого порядка включительно, то решение $u(x)$ имеет непрерывные производные до $(k+1)$-ого порядка включительно. В ряде случаев задача Коши может быть решена аналитически, однако для большинства задач, представляющих практический интерес, такое решение найти невозможно. Поэтому, когда подобная задача встречается на практике, получают приближенное решение с помощью численных методов, в частности конечно-разностных методов.

5.2. Численные методы решения задачи Коши

При изучении численных методов для задачи Коши будем считать, что она имеет единственное решение в замкнутой прямоугольной области $D = \{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant u \leqslant d\}$. Пусть требуется найти решение задачи (5.1.1) на отрезке $[a, b]$. Введем на отрезке $[a, b]$ *сетку* ω_{h_i} следующим образом:

$$\omega_{h_i} = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b\},$$

где точки x_i, $i = 0, 1, ..., n$ называются узловыми точками или узлами сетки, $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, ..., n$ — шагами сетки; n —натуральное число. Если $h_i = h = const$, то такую сетку будем обозначать ω_h и называть *равномерной*. Сетку ω_h можно задать так:

$$\omega_h = \{x_i = x_0 + i \cdot h,\ \ x_0 = a,\ \ h = (b - a)/n,\ \ i = 0, 1, ...n\}. \qquad (5.2.1)$$

В этой главе в дальнейшем будем пользоваться равномерной сеткой ω_h с шагом h.

Пусть $u_i = u(x_i)$ — значение точного решения (5.1.1) в точке x_i, а y_i — соответствующее приближенное значение, полученное с помощью рассматриваемого численного метода.

5.2.1. Явный метод Эйлера

Предположим, что функция $f(x, u)$ в рассматриваемой области D имеет непрерывные частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial u$. В таком случае, как отмечалось выше, решение задачи Коши (5.1.1) имеет непрерывную вторую производную

$$u''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) f(x, u). \qquad (5.2.2)$$

Явный метод Эйлера определяется формулами

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, ..., n-1, \tag{5.2.3}$$

где $y_0 = u_0$.

Соотношения (5.2.3) метода Эйлера получаются следующим образом. Функцию $u(x)$ разлагаем по формуле Тейлора в окрестности точки x_i:

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i) + h \cdot u'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(\xi_i) = \\ &= u(x_i) + h \cdot f(x_i, u(x_i)) + \frac{h^2}{2} u''(\xi_i), \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

где точка $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., n-1$. Затем отбрасываем остаточный член и заменяем значения $u(x_i)$ на y_i.

На рис. 5.1 дана геометрическая интерпретация метода Эйлера. Изображены первые два шага метода, т.е. проиллюстрировано вычисление значений y_1 и y_2 при $x = x_1$ и $x = x_2$. Интегральные кривые a_0, a_1 и a_2 описывают точные решения уравнения $u' = f(x, u)$ с начальными условиями $u(x_0) = u_0 = y_0$, $u(x_1) = y_1$ и $u(x_2) = y_2$, соответственно. При этом кривая a_0 соответствует точному решению задачи Коши (5.1.1), так как она проходит через начальную точку $A_0(x_0, u_0)$. Точки A_1 и A_2 получены в результате численного решения задачи Коши методом Эйлера. Их отклонение от кривой a_0 характеризует погрешность метода. Уже при выполнении первого шага мы фактически сразу

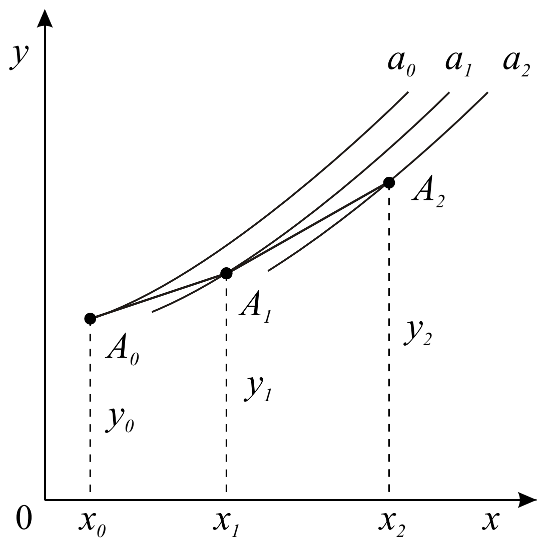

Рис. 5.1.

попадаем на другую интегральную кривую. Отрезок A_0A_1 — отрезок касательной к кривой a_0 в точке A_0. Тангенс угла наклона касательной A_0A_1 равен значению производной $u'_0 = f(x_0, u_0)$. Касательная A_1A_2 проводится уже к другой интегральной кривой a_1. Таким образом, погрешность метода Эйлера приводит к тому, что на очередном шаге решение переходит на другую интегральную кривую.

Пример. Явным методом Эйлера решить задачу

$$u' = u - x, \;\; u(0) = -1.$$

Решение. Используя формулу (5.2.3), получаем

$$\begin{aligned}
&y_0 = -1,\\
&y_1 = y_0 + h\cdot(y_0 - x_0) = -1 - h,\\
&y_2 = y_1 + h\cdot(y_1 - x_1) = -1 - h + h\cdot(-1 - h - h) = -1 - 2h - 2h^2,\\
&y_3 = y_2 + h\cdot(y_2 - x_2) = -1 - 3h - 6h^2 - 2h^3
\end{aligned}$$

и т.д. С другой стороны, точным решением является функция $u(x) = 1 + x - 2\mathrm{e}^x$. Сравним точное решение с полученным приближенным:

$$\begin{aligned}
u_1 &= u(h) = 1 + h - 2\mathrm{e}^h = 1 + h - 2\cdot\left(1 + h + \frac{h^2}{2}\mathrm{e}^{\xi_1}\right) =\\
&= -1 - h - h^2\cdot\mathrm{e}^{\xi_1}, \quad 0 < \xi_1 < h;\\
u_2 &= u(2h) = 1 + 2h - 2\mathrm{e}^{2h} = 1 + 2h - 2\cdot\left(1 + 2h + \frac{4h^2}{2}\mathrm{e}^{\xi_2}\right) =\\
&= -1 - 2h - 4h^2\cdot\mathrm{e}^{\xi_2}, \quad 0 < \xi_2 < 2h.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$u_3 = u(3h) = -1 - 3h - 9h^2\cdot\mathrm{e}^{\xi_3}, \quad 0 < \xi_3 < 3h.$$

Видно, что численное решение отличается от точного на величину, содержащую члены второго порядка h^2 и выше, с коэффициентами, растущими с номером i. Ниже покажем, что ошибка в методе Эйлера всегда не превышает значения $C \cdot h$, где C — постоянная, не зависящая от h.

Вообще главный вопрос для любого численного метода состоит в оценке точности приближенных значений y_i.

Определение 1. Локальной ошибкой вычислений при $x = x_i$ называется величина

$$\varepsilon_i = |u(x_i) - y_i|.$$

Эта ошибка зависит от приближенного метода, использованного при подсчете y_i, от функции $f(x, u)$ и точности вычислений. Поэтому говорят, что локальная ошибка зависит от методической ошибки $\varepsilon_i^{(\mathrm{m})}$ (т.е. от ошибки вычислений, связанной с методом нахождения приближенного решения) и ошибки округления (на практике все значения, полученные в результате вычислений, берутся с конечным числом знаков). Ошибку округления можно уменьшить, повышая точность арифметических вычислений, а методическая ошибка не зависит от точности вычислений, и поэтому за счет повышения точности вычислений ее устранить нельзя. Иными словами, методическая ошибка совпадает с локальной ошибкой для абсолютно точно найденных значений y_i.

Определение 2. Глобальной методической ошибкой на отрезке $[a, b]$ называется величина

$$\varepsilon^{(\mathrm{m})} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \varepsilon_i^{(\mathrm{m})}.$$

Для использования на практике пригодны лишь те методы численного решения, для которых

$$\varepsilon^{(\mathrm{m})} \to 0 \ \text{ при } \ h \ \to 0.$$

Определение 3. Численный метод решения задачи (5.1.1) называется методом k-ого порядка точности, если

$$\varepsilon^{(\mathrm{m})} = O(h^k) \ \text{ при } \ h \ \to 0,$$

или иначе

$$\varepsilon^{(\mathrm{m})} \leqslant C \cdot h^k \text{ при } h \ \to 0, \tag{5.2.5}$$

где $C = \mathrm{const} > 0$ зависит от $f(x, u)$, a, b и численного метода решения задачи (5.1.1), но не зависит от h.

Покажем, что метод Эйлера является методом первого порядка точности. Будем полагать, что арифметические вычисления проводятся точно и поэтому локальная и методическая ошибки совпадают. Докажем следующее утверждение.

Лемма. Пусть при любом $i = 0, 1, ..., n-1$ справедлива оценка

$$\varepsilon_{i+1} \leqslant (1 + c_1 \cdot h)\varepsilon_i + c_2 \cdot h^{k+1}, \tag{5.2.6}$$

где $h = (b-a)/n$; $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ — постоянные, не зависящие от h. Тогда соответствующий метод численного интегрирования задачи (5.1.1) является методом k-ого порядка точности.

Доказательство. В соответствии с определением надо доказать оценку (5.2.5). Заметим, что

$$\varepsilon_0 = |u(x_0) - y_0| = |u(x_0) - u_0| = 0.$$

Из оценки (5.2.6) имеем

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i+1} &\leqslant (1 + c_1 \cdot h)\varepsilon_i + c_2 \cdot h^{k+1} \leqslant \\
&\leqslant (1 + c_1 \cdot h) \cdot [(1 + c_1 \cdot h)\varepsilon_{i-1} + c_2 \cdot h^{k+1}] + c_2 \cdot h^{k+1} = \\
&= (1 + c_1 \cdot h)^2 \cdot \varepsilon_{i-1} + c_2 \cdot h^{k+1} \cdot [1 + (1 + c_1 \cdot h)] \leqslant \\
&\leqslant \ \ldots \ \leqslant \\
&\leqslant (1 + c_1 \cdot h)^{i+1} \cdot \varepsilon_0 + c_2 \cdot h^{k+1} \cdot [1 + (1 + c_1 \cdot h) + \ldots + (1 + c_1 \cdot h)^i] = \\
&= c_2 \cdot h^{k+1} \cdot \frac{(1 + c_1 \cdot h)^{i+1} - 1}{(1 + c_1 \cdot h) - 1}.
\end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$(1 + c_1 \cdot h)^{i+1} = \exp\{(i+1) \cdot \ln(1 + c_1 \cdot h)\} \leqslant \exp\{(i+1) \cdot c_1 \cdot h\} =$$
$$= \exp\{c_1 \cdot \frac{b-a}{n} \cdot (i+1)\} \leqslant \mathrm{e}^{c_1 \cdot (b-a)}.$$

С помощью этого последнего неравенства из предыдущей цепочки неравенств следует оценка

$$\varepsilon_{i+1} \leqslant \frac{[c_2 \cdot (\mathrm{e}^{c_1 \cdot (b-a)} - 1)]}{c_1} \cdot h^k,$$

выполняющаяся для всех $i = 0, 1, ..., (n-1)$. Сравнивая последнее неравенство с неравенством (5.2.5) и полагая $C = [c_2 \cdot (\mathrm{e}^{c_1 \cdot (b-a)} - 1)]/c_1$, убеждаемся в справедливости леммы.

Теперь, в соответствии с леммой, чтобы доказать, что метод Эйлера является методом первого порядка точности, достаточно проверить неравенство

$$\varepsilon_{i+1} \leqslant (1 + c_1 \cdot h)\varepsilon_i + c_2 \cdot h^{k+1},$$

при всех $i = 0, 1, ..., n-1$.

Вычитая (5.2.3) из равенств (5.2.4), получаем

$$u_{i+1} - y_{i+1} = u_i - y_i + h \cdot [f(x_i, u(x_i)) - f(x_i, y_i)] + \frac{h^2}{2} u''(\xi_i). \tag{5.2.7}$$

По теореме Лагранжа о конечном приращении функции имеем

$$f(x_i, u(x_i)) - f(x_i, y_i) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_i, \eta_i) \cdot (u_i - y_i),$$

где точка η_i лежит между точками u_i и y_i.

С помощью последнего равенства из соотношения (5.2.7) находим оценку

$$\varepsilon_{i+1} \leqslant \varepsilon_i + h \cdot c_1 \cdot \varepsilon_i + c_2 \cdot h^2 = \varepsilon_i \cdot (1 + c_1 h) + c_2 \cdot h^2,$$

где $c_1 = \max\limits_{(x,u) \in D} |f'_u(x,u)|$, $c_2 = 0.5 \cdot \max\limits_{(x,u) \in D} (|f'_x(x,u)| + |f'_u(x,u)| \cdot |\, f(x,u)|)$ (см. формулу (5.2.2)).

Таким образом, доказано, что явный метод Эйлера имеет первый порядок точности.

5.2.2. Методы Рунге-Кутта

Рассмотрим теперь методы, погрешность которых при стремлении h к нулю убывает с более высокой скоростью.

Метод Рунге-Кутта второго порядка точности. Его расчетные формулы:

$$\begin{aligned} &k_1 = h \cdot f(x_i, y_i), \\ &k_2 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_1), \\ &y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} \cdot (k_1 + k_2), \quad i = 0, 1, ..., n-1. \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Вычисления с помощью этого метода проводятся по формулам:

$$\begin{aligned} &k_1 = h \cdot f(x_i, y_i), \\ &k_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}), \\ &k_3 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}), \\ &k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3), \\ &y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, ..., n-1. \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Мы рассмотрели методы, для которых при вычислении y_{i+1} нужно знать лишь значение y_i, а значения приближенного решения в предшествующих точках не входят в расчетные формулы. Иными словами, одношаговые методы — это методы с «короткой памятью». Если «память метода» получше, то его называют многошаговым. Более точно, метод численного интегрирования задачи называется l-шаговым, если при вычислении значения y_{i+1} используются l величин y_{i-l+1}, y_{i-l+2}, ... , y_i.

5.2.3. Многошаговые методы Адамса

Из (5.1.1) следует, что

$$u(x_{i+1}) - u(x_i) = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x)\,dx = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x))\,dx \approx \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\,dx,$$

где $p(x)$ — полином, аппроксимирующий $f(x, u(x))$. Пусть $f_i = f(x_i, y_i)$, где y_i — приближенное решение задачи (5.1.1), и в качестве $p(x)$ возьмем интерполяционный полином, проходящий через l ранее найденных точек (x_j, f_j) $(j = (i-l+1), (i-l+2), (i-l+3), \ldots, i)$, включая текущую точку (x_i, f_i). Если $l = 1$, то имеем явный метод Эйлера (5.2.3). Если $l = 2$, то $p(x)$ — линейная функция (рис. 5.2,a), проходящая через две точки (x_{i-1}, f_{i-1}) и (x_i, f_i):

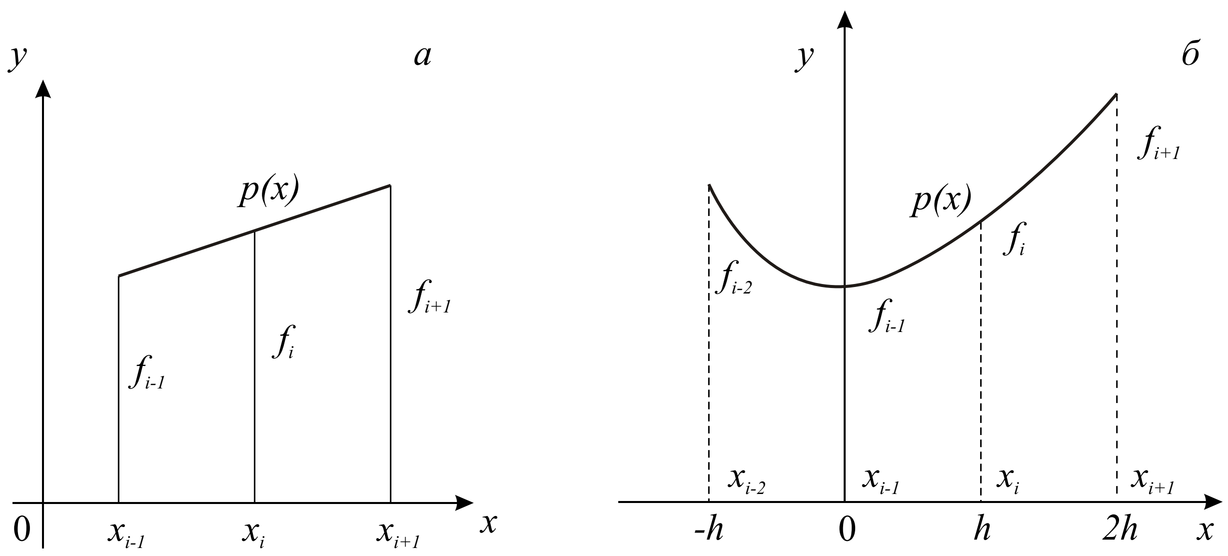

Рис. 5.2.

$$p(x) = \frac{(x_i - x)}{h} \cdot f_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})}{h} \cdot f_i, \quad p(x_{i-1}) = f_{i-1}, \quad p(x_i) = f_i.$$

Интегрируя полином от x_i до x_{i+1}, получаем двухшаговый метод Адамса второго порядка точности (он также называется методом Адамса-Башфорта):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (3f_i - f_{i-1}). \tag{5.2.10}$$

Если $l = 3$, то $p(x)$ — парабола, проходящая через точки (x_{i-2}, f_{i-2}), (x_{i-1}, f_{i-1}) и (x_i, f_i) (рис. 5.2,*б*), а соответствующий трехшаговый метод Адамса третьего порядка точности имеет вид

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} \cdot (23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}). \tag{5.2.11}$$

Формулу (5.2.11) легко получить, если перейти к новой системе координат, в которой координата x точки x_{i-1} равна нулю (см. рис. 5.2,*б*). Тогда

$$\begin{aligned}
&p(x) = ax^2 + bx + c;\\
&p(-h) = ah^2 - bh + c = f_{i-2},\\
&p(0) = c = f_{i-1},\\
&p(h) = ah^2 + bh + c = f_i.
\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$p(x) = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{2h^2} \cdot x^2 + \frac{f_i - f_{i-2}}{2h} \cdot x + f_{i-1}. \tag{5.2.12}$$

Интегрируя выражение (5.2.12) на отрезке $[h, 2h]$, получим формулу (5.2.11).

Если $l = 4$ то интерполяционный многочлен является кубическим и мы получаем формулу Адамса четвертого порядка точности

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \cdot (55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}). \tag{5.2.13}$$

Многошаговые методы требуют в начале работы знания значений в первых l точках: y_0, y_1, ... , y_{l-1}. Мы не можем использовать, например, формулу (5.2.13) при $i < 3$. Выход из положения состоит в применении какого-либо одношагового метода того же порядка точности, например метода Рунге-Кутта, до тех пор, пока не будет получено достаточное количество значений для проведения расчетов с помощью многошагового метода.

Замечание. Наряду с рассмотренными явными методами существуют и неявные методы интегрирования дифференциальных уравнений. Приведем два таких метода.

Неявный метод Эйлера. Это метод первого порядка точности. Его расчетная формула:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}), \;\; i = 0, 1, ..., n-1. \tag{5.2.14}$$

Чтобы найти y_{i+1} надо решить это уравнение (может быть нелинейное) относительно этой переменной.

Метод трапеций. Это метод второго порядка точности. Значения y_{i+1} находятся в результате решения уравнений

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \;\; i = 0, 1, ..., n-1. \tag{5.2.15}$$

5.2.4. Правило Рунге практической оценки погрешности

Это правило (см. гл. 3 и 4) применимо для практической оценки погрешности и при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $y_i^{(h)}$ — значение в точке x_i приближенного решения $y^{(h)}$ задачи Коши (5.1.1) на отрезке $[a, b]$, найденное с шагом h, где $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, 1, ..., n$, n — число разбиений отрезка $[a, b]$, $h = (b-a)/n$. И пусть $y_i^{(h/2)}$ — значение в той же точке x_i, но приближенного решения $y^{(h/2)}$, найденное с шагом $h/2$, т.е. число разбиений в этом случае равно $2n$. Считается, что $y^{(h/2)}$ является решением задачи Коши (5.1.1) с погрешностью ε, если

$$\frac{|\, y_i^{(h/2)} - y_i^{(h)}|}{2^k - 1} < \varepsilon,$$

где $i = 1, 2, ..., n$; k — порядок точности численного метода (например, $k = 1$ — для метода Эйлера (5.2.3), $k = 4$ — для метода Рунге-Кутта (5.2.9)).

Алгоритм вычислений. Допустим, что мы ищем численное решение задачи Коши (5.1.1) с помощью метода Рунге-Кутта четвертого порядка точности ($k = 4$). Опишем алгоритм вычислений, основанный на применении правила Рунге практической оценки погрешности. Численное решение находят методом итераций. Пусть l — номер итерации, y^l — численное решение, найденное с шагом h_l, где h_l — расчетный шаг на l-ой итерации. Очередную итерацию осуществляют следующим образом. Рассчитывают y^{l+1} с шагом $h_{l+1} = h_l/2$. После этого проверяют выполнение неравенства

$$\frac{\mid y_i^{l+1} - y_i^l \mid}{2^k - 1} < \varepsilon, \tag{5.2.16}$$

строго говоря, во всех общих точках x_i решений y^l и y^{l+1}.

Обычно выполнение неравенства (5.2.16) проверяют не во всех общих точках решений y^l и y^{l+1}, а только в выделенных *контрольных* точках. В качестве контрольных можно взять узловые точки $\{x_i^0\}$, соответствующие начальному числу разбиения n_0 с шагом h_0: $x_i^0 = a + i \cdot h_0$, $i = 0, 1, ..., n_0$, $h_0 = (b - a)/n_0$. Число n_0 (это целое число) определяется по формуле (см. (3.3.2) и (3.3.3))

$$n_0 = \left[\frac{b - a}{\sqrt[k]{\varepsilon}}\right] + 1. \tag{5.2.17}$$

Здесь k — порядок точности метода, квадратные скобки [ ], как и в (3.3.2) и (3.3.3), обозначают целую часть заключенного в них числа.

Замечание. Если $\frac{b-a}{\sqrt[k]{\varepsilon}} = \left[\frac{b-a}{\sqrt[k]{\varepsilon}}\right]$, т.е. если дробная часть числа $\frac{b-a}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ равняется нулю, то 1 в формуле (5.2.17) можно не прибавлять. Пусть, например, $k = 4$, $[a, b]$ есть отрезок $[0, 1]$, а $\varepsilon = 0.0001$. Понятно, что в этом случае в качестве n_0 можно взять число 10, а не 11 (как это следует из формулы (5.2.17)), тогда $h_0 = 0.1$.

5.3. Интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы m обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \ \ \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0, \tag{5.3.1}$$

где $\mathbf{u}' = d\mathbf{u}/dx$,

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ \vdots \\ u_m'(x) \end{pmatrix}, \ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_m(x) \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}(x, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} f_1(x, u_1, ..., u_m) \\ \vdots \\ f_m(x, u_1, ..., u_m) \end{pmatrix},$$

$\mathbf{u}_0 = \{u_{1,0}, ..., u_{m,0}\}$; x_0, $u_{i,0}, i = 1, ..., m$ — заданные числа.

В случае задачи Коши (5.3.1) изложенные приближенные методы интегрирования Эйлера, Рунге-Кутта и Адамса формально остаются теми же, только функции u, f, y и коэффициенты k_i в формулах Рунге-Кутта (5.2.8) и (5.2.9) заменяются соответственно на вектор-функции $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$ и векторы $\mathbf{y}$ и $\mathbf{k}_i$. Правило Рунге применяется для каждой координаты вектора $\mathbf{u}$ в отдельности.

Пусть, например, требуется найти на отрезке $[a, b]$ решение задачи Коши (5.3.1) для $m = 2$, записанной в виде

$$\begin{cases} u_1' = f_1(x, u_1, u_2), \\ u_2' = f_2(x, u_1, u_2) \end{cases}, \quad \begin{cases} u_1(x_0) = u_{1,0}, \\ u_2(x_0) = u_{2,0} \end{cases}, \quad x_0 = a. \tag{5.3.2}$$

или в векторной форме

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \ \ \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0, \ \ m = 2, \tag{5.3.3}$$

где

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}, \mathbf{f}(x, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} f_1(x, u_1, u_2) \\ f_2(x, u_1, u_2) \end{pmatrix}, \mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \end{pmatrix}.$$

Приведем для системы (5.3.3) расчетные формулы методов Рунге-Кутта 2-ого и 4-ого порядков точности (аналогичные формулам (5.2.8) и (5.2.9)) в векторной и координатной формах.

Расчетные формулы метода Рунге-Кутта второго порядка точности для системы (5.3.3):

$$\begin{aligned} &\mathbf{k}_1 = h \cdot \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i), \\ &\mathbf{k}_2 = h \cdot \mathbf{f}(x_i + h, \mathbf{y}_i + \mathbf{k}_1), \\ &\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad i = 0, 1, ..., n-1. \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

В координатной форме формулы (5.3.4) запишутся так:

$$\begin{aligned} &k_{1,1} = h \cdot f_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), \\ &k_{1,2} = h \cdot f_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), \\ &k_{2,1} = h \cdot f_1(x_i + h, y_{1,i} + k_{1,1}, y_{2,i} + k_{1,2}), \\ &k_{2,2} = h \cdot f_2(x_i + h, y_{1,i} + k_{1,1}, y_{2,i} + k_{1,2}), \\ &y_{1,i+1} = y_{1,i} + \frac{1}{2} \cdot (k_{1,1} + k_{2,1}), \\ &y_{2,i+1} = y_{2,i} + \frac{1}{2} \cdot (k_{1,2} + k_{2,2}), \quad i = 0, 1, ..., n-1. \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Расчетные формулы метода Рунге-Кутта четвертого порядка точности для системы (5.3.3):

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{k}_1 = h \cdot \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i),\\
&\mathbf{k}_2 = h \cdot \mathbf{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{\mathbf{k}_1}{2}\right),\\
&\mathbf{k}_3 = h \cdot \mathbf{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{\mathbf{k}_2}{2}\right),\\
&\mathbf{k}_4 = h \cdot \mathbf{f}(x_i + h, \mathbf{y}_i + \mathbf{k}_3),\\
&\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{1}{6} \cdot (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad i = 0, 1, ..., n-1.
\end{aligned}
\tag{5.3.6}
$$

Координатная форма формулы (5.3.6) имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&k_{1,1} = h \cdot f_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}),\\
&k_{1,2} = h \cdot f_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}),\\
&k_{2,1} = h \cdot f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{1,2}}{2}\right),\\
&k_{2,2} = h \cdot f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{1,2}}{2}\right),\\
&k_{3,1} = h \cdot f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{2,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{2,2}}{2}\right),\\
&k_{3,2} = h \cdot f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{2,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{2,2}}{2}\right),\\
&k_{4,1} = h \cdot f_1(x_i + h, y_{1,i} + k_{3,1}, y_{2,i} + k_{3,2}),\\
&k_{4,2} = h \cdot f_2(x_i + h, y_{1,i} + k_{3,1}, y_{2,i} + k_{3,2}),\\
&y_{1,i+1} = y_{1,i} + \frac{1}{6} \cdot \left(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}\right),\\
&y_{2,i+1} = y_{2,i} + \frac{1}{6} \cdot \left(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}\right), \quad i = 0, 1, ..., n-1.
\end{aligned}
\tag{5.3.7}
$$

Понятно, что вид формул в векторной форме (5.3.4) и (5.3.6) не зависят от числа уравнений m в системе (5.3.1)

5.4. Задание к лабораторной работе

Для дифференциального уравнения (или системы уравнений) из предложенного варианта необходимо:

1) получить точное решение уравнения (системы уравнений) с заданными начальными условиями;

2) написать программу численного интегрирования дифференциального уравнения (системы уравнений) методом Рунге-Кутта второго или четвертого порядка точности. Для оценки точности вычислений воспользоваться правилом Рунге;

3) найти численное решение дифференциального уравнения (системы уравнений) с точностью $\varepsilon = 0.0001$ и оценить погрешность как максимум разности в узлах между точным решением и решением, полученным численным методом.

Оформите отчет по лабораторной работе. Он должен содержать описание использованного численного метода, результаты расчетов и текст программы.

Варианты задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и варианты задачи Коши для уравнений второго порядка и систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, а также ответы к ним представлены в табл. 5.1–5.6.

Задача Коши для уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} &u'' + p(x)u' + q(x)u = g(x)\,, \\ &u(x_0) = A, \;\; u'(x_0) = B\,; \\ &x \in [a, b], \;\; x_0 = a \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

решается сведением к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть $u_1(x) = u(x)$, а $u_2(x) = u'(x)$. Тогда для $u_1(x)$ и $u_2(x)$ из (5.4.1) получаем следующую задачу Коши

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = g(x) - q(x) \cdot u_1 - p(x) \cdot u_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_1(x_0) = A, \\ u_2(x_0) = B. \end{cases} \tag{5.4.2}$$

Постановка задачи Коши и расчетные формулы для системы, состоящей из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, приведены выше (см.(5.3.2)— (5.3.7)).

Таблица 5.1. Варианты задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

№ вар.	Функция $f(x,u)$	Отрезок $[a,b]$: a	Отрезок $[a,b]$: b	Начальное условие u_0
1	2	3	4	5
1	$-x/u$	0	1	2
2	$2u/x$	1	3	1
3	$-\dfrac{x}{1+x}\cdot u$	0	2	1
4	e^{x+u}	0	0.5	0
5	$\dfrac{u}{x\cdot\ln x}+\dfrac{1}{x}$	e	e^2	1
6	$-2x\cdot u+x\cdot\mathrm{e}^{-x^2}$	0	2	1
7	$\dfrac{3u}{x}-x$	1	3	2
8	$-\operatorname{tg}x\cdot u+\dfrac{1}{\cos x}$	0	$\pi/3$	1
9	$\dfrac{2x}{1+x^2}\cdot u+1+x^2$	1	3	2
10	$2u+e^x-x$	0	1	1/4
11	$-2u+\mathrm{e}^{3x}$	0	1	6/5
12	$-u/x+2\ln x+1$	1	3	1
13	$\dfrac{2u}{1+x}+\mathrm{e}^x\cdot(1+x)^2$	0	2	1

Окончание таблицы 5.1.

1	2	3	4	5
14	$\dfrac{u}{x} + x \cdot \cos x$	1	3	$\sin 1$
15	$u + \mathrm{e}^x/x$	1	2	0
16	$(u+1)/x$	1	3	0
17	$\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x \cdot u$	0	2	0
18	$(\sin x - u) \cdot \cos x$	0	π	0
19	$-1 + u/x$	1	3	0
20	$-(x+u)/x$	1	3	$1/2$
21	$-u + \cos x$	0	π	$1/2$
22	$2u - x^2$	0	3	$1/4$
23	$-u + 2x$	0	3	-1
24	u/x	1	4	1
25	$u/(2x)$	1	4	1
26	$-2u + 4x$	0	2	0
27	$-\dfrac{u}{x} \cdot \ln\left(\dfrac{u}{x}\right)$	1	2	e^2
28	$2u/x$	1	3	2
29	$-\dfrac{x}{1+x} \cdot u$	0	2	2
30	$-x/u$	0	1	1

Таблица 5.2. Ответы к вариантам задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

№ вар.	Решение $u(x)$	№ вар.	Решение $u(x)$
1	$\sqrt{4-x^2}$	16	$x-1$
2	x^2	17	e^x-1
3	$(x+1)\cdot\mathrm{e}^{-x}$	18	$\mathrm{e}^{-\sin x}+\sin x-1$
4	$-\ln(2-\mathrm{e}^x)$	19	$x\cdot\ln(1/x)$
5	$(1+\ln(\ln x))\cdot\ln x$	20	$\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{2}$
6	$\mathrm{e}^{-x^2}\cdot(1+x^2/2)$	21	$(\sin x+\cos x)/2$
7	x^2+x^3	22	$(2x^2+2x+1)/4$
8	$\sin x+\cos x$	23	$\mathrm{e}^{-x}+2x-2$
9	$x\cdot(1+x^2)$	24	x
10	$\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}$	25	$\sqrt{x}$
11	$\mathrm{e}^{-2x}+\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{5}$	26	$\mathrm{e}^{-2x}+2x-1$
12	$x\cdot\ln x+1/x$	27	$x\cdot\mathrm{e}^{1+x}$
13	$(x+1)^2\cdot\mathrm{e}^x$	28	$2x^2$
14	$x\cdot\sin x$	29	$2\cdot(x+1)\cdot\mathrm{e}^{-x}$
15	$\mathrm{e}^x\cdot\ln x$	30	$\sqrt{1-x^2}$

Таблица 5.3. Варианты задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

№ вар.	Функции			Отрезок $[a, b]$		Нач. условия	
	$p(x)$	$q(x)$	$g(x)$	a	b	A	B
1	-5	4	0	0	2	1	1
2	0	-1	e^x	0	1	3	$3/2$
3	-2	1	0	2	5	1	-2
4	0	1	$\cos x$	0	1	1	2
5	0	4	$4 \cdot [\sin(2x) + \cos(2x)]$	π	2π	2π	2π
6	-4	3	e^{5x}	0	1	3	9
7	-2	0	$2e^x$	1	3	-1	0
8	-8	7	14	0	1	1	0
9	0	1	$4e^x$	0	π	4	-3
10	-1	0	$2 \cdot (1 - x)$	0	1	1	1
11	6	0	8	0	1	2	6
12	-2	2	$4e^x \cdot \cos x$	π	2π	$\pi \cdot e^{\pi}$	e^{π}
13	-5	0	7	0	1	1	$3/5$
14	0	1	$5\sin(2x)$	0	1	1	$2/3$
15	-2	1	$3e^x$	0	1	2	3

Таблица 5.4. Ответы к вариантам задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

№ вар.	Решение $u(x)$	№ вар.	Решение $u(x)$
1	e^{x}	8	$2-\frac{7}{6}e^{x}+\frac{1}{6}e^{7x}$
2	$\left(2+\frac{x}{2}\right)e^{x}+e^{-x}$	9	$-5\sin x+2\cos x+2e^{x}$
3	$(7-3x)e^{x-2}$	10	x^2+e^{x}
4	$\left(2+\frac{x}{2}\right)\sin x+\sin x$	11	$\frac{8}{3}+\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}e^{-6x}$
5	$3\pi\cdot\cos(2x)+\frac{1}{2}\sin(2x)+$ $+x\cdot[\sin(2x)-\cos(2x)]$	12	$e^{x}\cdot[(2x-\pi-1)\cdot\sin x-$ $-\pi\cdot\cos x]$
6	$\frac{1}{8}e^{x}+\frac{11}{4}e^{3x}+\frac{1}{8}e^{5x}$	13	$\frac{3}{5}-\frac{7}{5}x+\frac{2}{5}e^{5x}$
7	$e^{2x-1}-2e^{x}+e-1$	14	$4\sin x+\cos x-\frac{5}{3}\sin(2x)$
15	$\left(2+x+\frac{3}{2}\cdot x^2\right)\cdot e^{x}$		

Таблица 5.5. Варианты задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

№ вар.	Функции		Отрезок $[a,b]$		Нач. условия	
	$f_1(x,u_1,u_2)$	$f_2(x,u_1,u_2)$	a	b	$u_{1,0}$	$u_{2,0}$
1	$-1/u_2$	$1/u_1$	0	2	1	2
2	$(u_2-1)/u_2$	$1/(u_1-x)$	0	2	-1	1
3	$x/(u_1\cdot u_2)$	x/u_1^2	0	2	1	1
4	$-u_2/x$	$-u_1/x$	1	3	2	0
5	$-2\cdot\dfrac{u_1}{x}$	$u_2+(2+x)\cdot\dfrac{u_1}{x}$	1	3	1	$\mathrm{e}-1$
6	u_1+3u_2	$-u_1+5u_2$	0	3	3	1
7	$3u_1-2u_2+x$	$3u_1-4u_2$	0	2	$2\dfrac{13}{18}$	$3\dfrac{11}{12}$
8	$u_2-5\cos x$	$2u_1+u_2$	0	π	1	4
9	$2u_1+u_2+2\cdot\mathrm{e}^x$	$u_1+2u_2-3\cdot\mathrm{e}^{4x}$	0	2	0	-2
10	$3u_1+2u_2+3\cdot\mathrm{e}^{2x}$	$u_1+2u_2+\mathrm{e}^{2x}$	0	2	0	-2
11	$u_2+\cos x$	$1-u_1$	0	π	1	-0.5
12	$-5u_1-u_2+\mathrm{e}^x$	$u_1-3u_2+\mathrm{e}^{2x}$	0	2	$\dfrac{119}{900}$	$\dfrac{211}{900}$
13	$-u_2+\cos x$	$-u_1+\sin x$	0	π	1	-1
14	$2u_1-u_2$	$-u_1+2u_2-$ $-5\cdot\mathrm{e}^x\cdot\sin x$	0	π	2	3
15	$2u_1-4u_2+4\mathrm{e}^{-2x}$	$2u_1-2u_2$	-2	0	0	e^4

Таблица 5.6. Ответы к вариантам задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

№ вар.	$u_1(x)$	$u_2(x)$
1	$\mathrm{e}^{-x/2}$	$2 \cdot \mathrm{e}^{x/2}$
2	$x - \mathrm{e}^{x}$	e^{-x}
3	$\left(\frac{3}{2} \cdot x^2 + 1\right)^{1/3}$	$\left(\frac{3}{2} \cdot x^2 + 1\right)^{1/3}$
4	$x + 1/x$	$-x + 1/x$
5	$1/x^2$	$\mathrm{e}^{x} - 1/x^2$
6	$3 \cdot \mathrm{e}^{2x}$	e^{2x}
7	$2 \cdot \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-3x} - \frac{2}{3}x - \frac{5}{18}$	$\mathrm{e}^{2x} + 3 \cdot \mathrm{e}^{-3x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{12}$
8	$\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{2x} - 2\sin x - \cos x$	$-\mathrm{e}^{-x} + 2 \cdot \mathrm{e}^{2x} + \sin x + 3\cos x$
9	$\mathrm{e}^{3x} + x \cdot \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{4x}$	$\mathrm{e}^{3x} - (1 + x) \cdot \mathrm{e}^{x} - 2 \cdot \mathrm{e}^{4x}$
10	$\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}$	$-\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}$
11	$1 + \frac{x}{2} \cdot \cos x$	$-\frac{x}{2} \cdot \sin x - \frac{1}{2} \cdot \cos x$
12	$\frac{4}{25} \cdot \mathrm{e}^{x} - \frac{1}{36} \cdot \mathrm{e}^{2x}$	$\frac{1}{25} \cdot \mathrm{e}^{x} + \frac{7}{36} \cdot \mathrm{e}^{2x}$
13	$\sin x + \mathrm{e}^{x}$	$-\mathrm{e}^{x}$
14	$\mathrm{e}^{x} \cdot (2\cos x - \sin x)$	$\mathrm{e}^{x} \cdot (3\cos x + \sin x)$
15	0	e^{-2x}

Глава 6

Краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

6.1. Постановка задачи

Требуется найти функцию $u(x)$, которая является решением следующей *краевой* задачи

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \;\; a < x < b, \tag{6.1.1}$$

$$u(a) = A, u(b) = B. \tag{6.1.2}$$

Задачу (6.1.1), (6.1.2) называют краевой, поскольку дополнительные условия (6.1.2) задаются на концах отрезка $[a, b]$.

6.2. Численные методы решения краевой задачи

6.2.1. Разностная аппроксимация производных

Введем на отрезке $[a, b]$ равномерную сетку ω_h (5.2.1). Записывая уравнение (6.1.1) во внутренних узлах сетки ω_h, получим $(n-1)$-но уравнение для определения $3(n-1)$ неизвестных u_i, u'_i и u''_i:

$$u''_i + p_i u'_i + q_i u_i = f_i, \;\; i = 1, 2, ..., (n-1), \tag{6.2.1}$$

где $u_i = u(x_i)$, $u'_i = u'(x_i)$, $u''_i = u''(x_i)$, $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$. Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений относительно u_i, необходимо первые и вторые производные функции $u(x)$ в узловых точках выразить через значения $u(x)$ в этих точках. Будем предполагать, что функция $u(x)$ имеет все необходимые по ходу рассуждения непрерывные производные. Выразим значения u_{i+1} и u_{i-1} по формуле Тейлора, беря точку x_i в качестве точки разложения:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2!}u''_i + \frac{h^3}{3!}u'''_i + O(h^4), \\ u_{i-1} &= u_i - hu'_i + \frac{h^2}{2!}u''_i - \frac{h^3}{3!}u'''_i + O(h^4). \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Отсюда, учитывая свойства величины $O(h^k)$ (см. гл. 3), можно получить следующие выражения для точного значения первой производной функции $u(x)$ в точке x_i:

$$\begin{aligned} u'_i &= \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(h), \\ u'_i &= \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + O(h), \\ u'_i &= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h^2), \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

а также выражение для точного значения второй производной функции $u(x)$ в той же точке x_i:

$$u''_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + O(h^2). \tag{6.2.4}$$

Отношения

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

в (6.2.3) называются *правой разностной производной*, *левой разностной производной* и *центральной разностной производной*, соответственно. Отношение

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$$

в (6.2.4) называется *второй разностной производной.*

Из (6.2.3) следует, что левая и правая разностные производные аппроксимируют производную $u'(x)$ с первым порядком точности относительно шага h, а центральная разностная производная — со вторым порядком точности относительно h. Из (6.2.4) следует, что вторая разностная производная аппроксимируют производную $u''(x)$ со вторым порядком точности относительно h.

6.2.2. Решение задачи методом прогонки

Пусть, как и ранее, y_i — приближенное значение, соответствующее точному значению u_i функции $u(x)$ в точке x_i. Заменим u_i'' и u_i' в (6.2.1) второй разностной производной и первой центральной разностной производной, соответственно, подставляя в них вместо u_i величины y_i. В результате вместо дифференциальной задачи (6.1.1), (6.1.2) получим следующую *разностную задачу*:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \;\; i = 1, 2, ..., (n-1), \tag{6.2.5}$$

$$y_0 = A, y_n = B. \tag{6.2.6}$$

Подставляя краевые условия (6.2.6) в (6.2.5), получим относительно значений y_i, $i = 1, 2, ..., (n-1)$ систему линейных алгебраических уравнений $(n-1)$-ого порядка с трехдиагональной матрицей

$$\begin{gathered}(h^2 q_1 - 2)y_1 + \left(1 + \frac{h}{2}\,p_1\right) y_2 = h^2 f_1 - A \cdot \left(1 - \frac{h}{2}\,p_1\right), \\ \left(1 - \frac{h}{2}\,p_i\right) y_{i-1} + (h^2 q_i - 2)y_i + \left(1 + \frac{h}{2}\,p_i\right) y_{i+1} = h^2 f_i, \\ \hfill i = 2, ..., (n-2);\end{gathered} \tag{6.2.7}$$

$$\left(1 - \frac{h}{2}p_{n-1}\right) y_{n-2} + (h^2 q_{n-1} - 2) y_{n-1} = h^2 f_{n-1} - B \cdot \left(1 + \frac{h}{2}p_{n-1}\right).$$

Система (6.2.7) решается методом прогонки [1].

6.2.3. Решение задачи методом стрельбы

Идея метода. Как известно из курса дифференциальных уравнений общее решение (6.1.1) записывается в виде

$$u(x) = u_0(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x), \qquad (6.2.8)$$

где $u_0(x)$ — частное решение (6.1.1), а $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — линейно независимые частные решения, соответствующего (6.1.1) однородного уравнения

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0. \qquad (6.2.9)$$

Краевые условия (6.1.2), используя (6.2.8), можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_0(a) + c_1 u_1(a) + c_2 u_2(a) = A, \\ u_0(b) + c_1 u_1(b) + c_2 u_2(b) = B. \end{aligned} \qquad (6.2.10)$$

Пусть $u_0(x)$ — такое частное решение (6.1.1), что $u_0(a) = A$, а частные решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ уравнения (6.2.9) пусть удовлетворяют условиям $u_1(a) = 0$ и $u_2(a) \neq 0$, соответственно. Тогда из первого уравнения (6.2.10) следует равенство

$$A + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot u_2(a) = A,$$

т.е. $c_2 = 0$, а выражение (6.2.8) приобретает вид

$$u(x) = u_0(x) + c_1 u_1(x). \qquad (6.2.11)$$

Константу c_1 находим из второго краевого условия (6.2.10): $u(b) = u_0(b) + c_1 u_1(b) = B$. Следовательно $c_1 = (B - u_0(b))/u_1(b)$. Будем считать, что

$u_1(b) \neq 0$. Описанный способ решения задачи называют *методом стрельбы* или *методом пристрелки* [3].

Реализация метода. Итак, в соответствии (6.2.11), для приближенного решения $y(x)$ в узлах равномерной сетки ω_h можем записать

$$y_i = y_{0,i} + c_1 y_{1,i}, \quad i = 0, 1, ..., n. \tag{6.2.12}$$

Будем искать такие численные решения $y_{0,i}$ и $y_{1,i}$, для которых в 0-ом и 1-ом узлах сетки ω_h выполняются следующие условия:

$$y_{0,0} = A, \quad y_{0,1} = D_0, \tag{6.2.13}$$

$$y_{1,0} = 0, \quad y_{1,1} = D_1 \neq 0, \tag{6.2.14}$$

где D_0 и D_1 — константы. Формально алгоритм применим при произвольных значениях D_0 и D_1 ($D_1 \neq 0$), однако с целью уменьшения влияния вычислительной погрешности рекомендуется брать $D_0 = A + O(h)$ и $D_1 = O(h)$.

Записываем для $y_{0,i}$ и $y_{1,i}$ разностные уравнения, соответствующие неоднородному (6.1.1) и однородному (6.2.9) уравнениям

$$\frac{y_{0,i-1} - 2y_{0,i} + y_{0,i+1}}{h^2} + p_i \frac{y_{0,i+1} - y_{0,i-1}}{2h} + q_i \cdot y_{0,i} = f_i,$$

$$\frac{y_{1,i-1} - 2y_{1,i} + y_{1,i+1}}{h^2} + p_i \frac{y_{1,i+1} - y_{1,i-1}}{2h} + q_i \cdot y_{1,i} = 0,$$

$$i = 1, ..., (n-1).$$

Отсюда находим выражения для $y_{0,i+1}$ и $y_{1,i+1}$:

$$y_{0,i+1} = \frac{h^2 f_i - \left(1 - \dfrac{h}{2} p_i\right) \cdot y_{0,i-1} - (h^2 q_i - 2) \cdot y_{0,i}}{1 + \dfrac{h}{2} p_i},$$

$$y_{1,i+1} = \frac{-\left(1 - \dfrac{h}{2} p_i\right) \cdot y_{1,i-1} - (h^2 q_i - 2) \cdot y_{1,i}}{1 + \dfrac{h}{2} p_i}, \tag{6.2.15}$$

$$i = 1, ..., (n-1).$$

Заданные значения (6.2.13) и (6.2.14) позволяют по формулам (6.2.15) найти последовательно решения $y_0(x)$ и $y_1(x)$ во всех оставшихся узлах x_i, $i = 2, ..., n$. Постоянную c_1 находим по формуле (см. выше): $c_1 = (B - y_{0,n})/y_{1,n}$. Однако, может оказаться так, что $y_{1,n} = 0$. Поскольку выбор констант D_0 и D_1 в (6.2.13) и (6.2.14) находится в распоряжении вычислителя, то меняя значение D_1 в (6.2.14) можно найти решение $y_1(x)$, для которого $y_{1,n} \neq 0$. Решение всей задачи (6.1.1), (6.1.2) находится по формулам (6.2.12).

6.3. Задание к лабораторной работе

Для предложенного варианта лабораторной работы решить краевую задачу либо методом прогонки, либо методом стрельбы. Для задания краевого условия в точке b предварительно необходимо решить аналитически соответствующую задачу Коши:

$$
\begin{aligned}
&u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x)\,,\\
&u(x_0) = A, \;\; u'(x_0) = C\,;\\
&x \in [a, b], \;\; x_0 = a.
\end{aligned}
$$

Значение B находится подстановкой точки b в точное решение $u(x)$ задачи Коши: $B = u(b)$. Варианты задачи Коши приведены в табл. 6.1. Значения a и b во всех вариантах равны 0 и 1, соответственно $[a, b] = [0, 1]$.

Таблица 6.1. Варианты задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

№ вар.	Функции			Нач. условия	
	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	A	C
1	2	3	4	5	6
1	-2	2	$\mathrm{e}^x \cdot \sin x$	2	$3/2$
2	-7	12	5	1	2
3	2	2	$x \cdot \mathrm{e}^{-x}$	0	0
4	-2	2	x^2	0.5	0
5	-8	16	e^{4x}	0	1
6	0	-1	$2\mathrm{e}^x - x^2$	2	1
7	0	4	8	3	4
8	-1	0	$\mathrm{ch}(2x)$	0	0
9	-2	0	$\mathrm{e}^x(x^2 + x - 3)$	2	2
10	0	1	$4\mathrm{e}^x$	4	-3
11	0	-1	$2 - x^2$	1	1
12	0	4	e^{-2x}	0	0
13	-4	0	$6x^2 + 1$	0	3.5625
14	0	-4	$16x \cdot \mathrm{e}^{2x}$	0	3
15	1	-2	$-2x + 1$	1	-1

Окончание таблицы 6.1.

1	2	3	4	5	6
16	-6	8	10	1	2
17	-2	2	$2x$	0	1
18	0	4	$\sin(2x)+1$	0.25	0
19	-3	2	$2\sin x$	0	-0.2
20	0	-1	$2\,\mathrm{sh}\,x$	0	1
21	1	-2	$\cos x - 3\sin x$	1	2
22	-1	0	3	6	2
23	0	4	$\sin x$	1	1
24	0	4	e^{x}	1	3
25	-1	-6	2	1	0
26	-8	7	14	1	5
27	0	9	$6\cos(3x)$	1	3
28	4	4	$5\mathrm{e}^{-2x}$	1	2
29	0	4	$3\sin(2x)$	2	0.75
30	0	1	$4x\cdot\mathrm{e}^{x}$	-2	0

Литература

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука,1989. 432 с.

2. Самарский А.А. Введение в численные методы. СПб.: Издательство «Лань», 2005. 288 с.

3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. 632 с.

4. Костомаров Д.П., Фаворский А.П. Вводные лекции по численным методам. М.: Университетская книга, Логос, 2006. 184 с.

5. Волков Е.А. Численные методы. М.: Наука, 1987. 248 с.

6. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

7. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы. М.: Издательский дом МЭИ, 2008. 672 с.

8. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2005. 840 с.

9. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. М.: Высш. шк., 2000. 190 с.

10. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам. М.: Едиториал УРСС, 2003. 208 с

Электронное учебное издание

Федотов Анатолий Александрович

Храпов Павел Васильевич

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Методические указания

к выполнению лабораторных работ

по курсу «Численные методы»

МГТУ им. Н.Э. Баумана