Оглавление

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1 Функции комплексной переменной.

1.1 Множество комплексных чисел. Основные понятия и определения.

Определение 1. ***Комплексным числом*** называется выражение $z = x + \boldsymbol{i}y$, где $x, y \in \Re$, а $\boldsymbol{i}$ называется ***мнимой единицей*** и определяется следующим образом: $\boldsymbol{i}^2 = -1$. Число x называется ***действительной частью*** комплексного числа: $x = \operatorname{Re} z$, y – ***мнимой частью***: $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + \boldsymbol{i}\, y_1$ и $z_2 = x_2 + \boldsymbol{i}\, y_2$ называются *равными*, если их действительные и мнимые части, соответственно, равны друг другу: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

Таким образом, *одно комплексное равенство эквивалентно двум действительным*.

Комплексное число $z = x + \boldsymbol{i}\, y$ *равно нулю*, *если* $x = y = 0$.

Суммой и *произведением* двух комплексных чисел называются комплексные числа

$$z_1 + z_2 \overset{def}{=} (x_1 + x_2) + \boldsymbol{i}(y_1 + y_2);\ \ z_1 z_2 \overset{def}{=} (x_1 y_1 - x_2 y_2) + \boldsymbol{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1) \text{ соответственно.}$$

Операции вычитания и деления определяются как действия обратные сложению и умножению, что приводит к следующему результату:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \boldsymbol{i} \cdot (y_1 - y_2)\ \ ,\ \ \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \boldsymbol{i} \cdot \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\ .$$

Таким образом, арифметические операции над комплексными числами производятся по обычным правилам действий с двучленами, с учетом того, что $\boldsymbol{i}^2 = -1$. Отсюда следует, что операции над комплексными числами подчинены обычным законам арифметики: коммутативности, ассоциативности и т.д.

Комплексные числа заполняют всю плоскость XOY, которую называют в этом случае *комплексной плоскостью*. Множество комплексных чисел, обычно, обозначают буквой K.

Определение 2. Число $\bar{z} = x - \boldsymbol{i}y$ называется ***комплексно сопряженным*** к z.

Определение 3. Величина $\operatorname{mod} z = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется ***модулем комплексного числа***.

Т.е. mod z *равен расстоянию от начала координат до т. z*. Нетрудно видеть, что $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

Примеры: 1) $z = \dfrac{2 - 3\boldsymbol{i}}{3 + 4\boldsymbol{i}}$; 2) Последовательность $\{\boldsymbol{i}^n\} = \{\boldsymbol{i}, -1, -\boldsymbol{i}, 1, \boldsymbol{i}, -1, \ldots\}$.

Замечание. *На множестве комплексных чисел не определено отношение* 'больше – меньше'. Комплексные числа можно сравнивать между собой только по модулю.

1.2 Комплексные числа в полярной системе координат. Формула Муавра.

В предыдущем параграфе было рассмотрено представление комплексных чисел в декартовой системе координат. Рассмотрим теперь комплексные числа в полярных координатах. Как известно, декартовы координаты выражаются через полярные следующим образом:

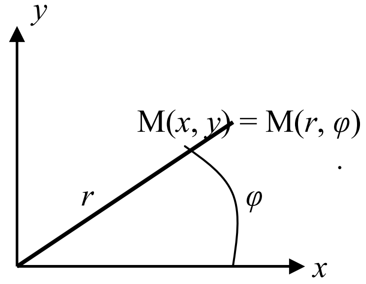


Рис. 1

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi & r \ge 0 \\ y = r \cdot \sin\varphi & -\pi \le \varphi < \pi. \end{cases}$$

Отсюда получаем: $z = r \cdot (\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi)$ – ***тригонометрическая форма комплексного числа***.

Здесь:

$r = |z|$ – *модуль комплексного числа*

(*так как* $|\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$).

φ – ***аргумент*** *комплексного числа* : $\varphi = \arg z$.

Рассматривается два стандарта изменения φ: $0 \le \varphi < 2\pi$ и $-\pi < \varphi \le \pi$.
Иногда приходится пользоваться понятием $\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
Ясно, что величина самого комплексного числа при этом никак не изменяется.

Формулы для стандарта $-\pi < \varphi \le \pi$ имеют вид: $$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, \ x > 0 \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, \ x < 0, y \ge 0 \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi, x < 0, y < 0 \\ при\, x = 0: \dfrac{\pi}{2}, y > 0; -\dfrac{\pi}{2}, y < 0. \end{cases}$$

(Для стандарта: $0 \le \varphi < 2\pi$ формулы будут немного отличаться)
Аргумент числа $z = 0$ *не определен.*

Примеры: -2 ; $\boldsymbol{i}$; $1 - \boldsymbol{i}\sqrt{3}$. {2, π ; 1, π/2 ; 2, −π/3 или 5π/3 }

Рассмотрим произведение 2-х комплексных чисел: $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1 + \boldsymbol{i}\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + \boldsymbol{i}\sin\varphi_2) =$
$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \boldsymbol{i}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \boldsymbol{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$
Т.е. *модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент – сумме аргументов*. Отсюда следует ***формула Муавра*:**
$$(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \boldsymbol{i}\sin n\varphi \ .$$

1.3 Извлечение корня n – ой степени из комплексных чисел.

По определению: $\left(\sqrt[n]{c}\right)^n = c$. На множестве действительных чисел для однозначности вводится понятие арифметического корня: корень четной степени – неотрицателен. В комплексной области такого ограничения быть не может (см. замечание в п. 1.1). Вообще говоря, все значения корня считаются равноправными. Из формулы Муавра следует, что одним из корней из числа $r(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi)$ будет число $\sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\varphi}{n} + \boldsymbol{i}\sin\dfrac{\varphi}{n})$. Нетрудно видеть, что любое из чисел $\sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + \boldsymbol{i}\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n})$ также являются корнями из этого числа $\forall k \in \mathrm{N}$. При этом все они будут различны для значений $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Для последующих значений k числа начнут повторяться. Окончательная формула имеет вид:
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + \boldsymbol{i}\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$
Все полученные значения располагаются в вершинах правильного n−угольника.
Замечание. Фактически, при извлечении корня пришлось использовать величину $\operatorname{Arg} z$.

Примеры. 1) $\sqrt[4]{-16}$. $\{\sqrt{2}(1+\boldsymbol{i}); \sqrt{2}(-1+\boldsymbol{i}); \sqrt{2}(-1-\boldsymbol{i}); \sqrt{2}(1-\boldsymbol{i})\}$.

2) Рассмотрим квадратный корень из положительных и отрицательных действительных чисел в комплексной области. Корни из положительного числа a^2 будут, очевидно, равны: $\sqrt{a^2} = \pm\, a$, что легко показать и формально. Отрицательные числа имеют аргумент, равный π. Отсюда аргументы значений корня будут равны $\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{-a^2} = \pm\, \boldsymbol{i}\cdot a$.

Следствием полученного результата являются формулы для корней квадратного уравнения в случае отрицательного дискриминанта: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \boldsymbol{i}\sqrt{-D}}{2a}$, $(D < 0)$.

1.4 Множества комплексной плоскости.

В п.1.1 было показано, что $|z|$ равен расстоянию от начала координат до т. z. Таким образом, геометрический смысл модуля в комплексной области совпадает с геометрическим смыслом модуля в действительной области. Легко видеть, что и модуль разности 2-х комплексных чисел обладает тем же свойством: $|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=d(z,z_0)$. Где $d(z,z_0)$ – расстояние от т. z до т. z_0 на комплексной плоскости. Отсюда следует, что *уравнение* $|z-z_0|=R$ *описывает окружность с центром в* т.z_0 *радиуса R*, неравенства $1\le|z-\boldsymbol{i}|<4$ кольцо ширины 3 с центром в т.$\boldsymbol{i}$, без внешней границы. *Уравнение* $\arg z=\pi/3$ *описывает луч из начала координат под углом в* 60^0 *к оси OX*. Неравенства $\pi/6\le\arg z\le\pi/4$ –множество точек между лучами под углом в 30^0 и 45^0 к оси OX (угол в 15^0 с границами). Вспомнив геометрический смысл кривых $2^{\underline{\text{го}}}$ порядка, можно сказать, что неравенство $\big||z-z_1|-|z-z_2|\big|<4$ описывает множество точек между ветвями гиперболы с фокусами в тт. z_1 и z_2, а $|z-z_1|+|z-z_2|\le 9$ – внутренние точки эллипса и сам эллипс.

В комплексной области вводится комплексное число $z=\infty$. Комплексная плоскость вместе с единственной бесконечно удаленной точкой называется ***расширенной комплексной плоскостью***. По умолчанию, говоря о комплексной плоскости, будем считать ее расширенной.

Понятие *области* в ТФКП имеет более конкретный смысл нежели в теории функций действительной переменной. Областью называется открытое связное множество точек комплексной плоскости (т.е. открытое множество, 2 любые точки которого можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей этому множеству). Напомним, что т. z называется ***внутренней точкой области***, если существует окрестность этой точки, целиком принадлежащая области и ***граничной точкой***, если любая ее окрестность содержит как точки области, так и точки области не принадлежащие. Множество граничных точек называется ***границей*** области. ***Замкнутой областью*** называется *ограниченная область вместе с границей*.

Область G называется ***односвязной***, если любой замкнутый без самопересечений контур $l\subset G$ ограничивает некоторую область $D\subset G$, и ***многосвязной*** в противном случае.

Определение. ***ε – окрестностью*** т. $z_0: U_\varepsilon(z_0)$ называется открытый круг радиуса ε с центром в т. z_0 : $|z-z_0|<\varepsilon$. **ε – окрестностью бесконечно удаленной** т. $z=\infty$: $U_\varepsilon(\infty)$ называется множество точек расширенной комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству: $|z|>\varepsilon$.

1.5 Функции комплексной переменной.

Пусть в комплексной плоскости задана некоторая область G и правило, по которому любому $z\in G$ ставится в соответствие определенное число $w\in W$. В этом случае говорят, что на области G задана однозначная функция $w=f(z)$, отображающая область G на W. Если одному значению z соответствует несколько чисел w, то такая функция называется ***многозначной***.

Функция $f(z)$ может быть представлена в следующем виде : $w=f(z)=u(x,y)+\boldsymbol{i}v(x,y)$, где $u(x,y)=\mathrm{Re}f(z)$, $v(x,y)=\mathrm{Im}f(z)$ – действительные функции двух переменных, являющиеся *действительной и мнимой частями комплексной функции f (z)*.

Примеры. 1) $f(z)=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ – функция комплексной переменной, принимающая только действительные значения.

2) $f(n)=f_n=(1+2\boldsymbol{i})^n, n=1,2,3,\ldots$ – последовательность комплексных чисел.

3) $f(z)=z^n, n\in\mathrm{N}$ – каждому значению аргумента z соответствует одно комплексное значение функции. Такие функции называются ***однозначными*** или ***однолистными***.

4) $w=f(z)=\sqrt[3]{z}$ – каждому значению аргумента z соответствует три комплексных значения функции (п.1.3). Такие функции называются ***многозначными*** или ***многолистными***. Например, при $z=-8$ имеем: $w_1=1+\sqrt{3}\boldsymbol{i}, w_2=-2, w_3=1-\sqrt{3}\boldsymbol{i}$.

Понятия предела функции комплексного переменного (в частности, предела последовательности) и непрерывности вводятся аналогично тому, как это сделано для функций действительного переменного. Отличие заключается только в том, что вместо абсолютной величины действительного числа везде следует понимать модуль комплексного. Таким образом, число $C = a + b\boldsymbol{i}$ является пределом функции $w = f(z) = u(x,y) + \boldsymbol{i}v(x,y)$ при $z \to z_0 = x_0 + \boldsymbol{i}y_0$, или $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = C$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall z: 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - C| < \varepsilon$.

Замечания. 1) Понятие предела ФКП (как и ФНП) является более сложным, нежели для функции одной действительной переменной. Это обусловлено существенно более многообразным стремлением аргумента ФКП (ФНП) к своей предельной точке.

2) Существование предела комплексной функции эквивалентно существованию пределов у двух действительных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ при $(x,y) \to (x_0,y_0)$.

Легко показать, что выполнены все арифметические свойства пределов.

Функция называется непрерывной в т. z_0, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Это равенство эквивалентно непрерывности функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в т. (x_0, y_0). Из предыдущего сразу следует, что выполняются все арифметические свойства непрерывных функций.

1.6 Ряды в комплексной области.

Существование понятия предела последовательности (1.5) позволяет рассматривать ряды в комплексной области (как числовые, так и функциональные). Стандартно определяются частичные суммы, абсолютная и условная сходимость числовых рядов. При этом *сходимость ряда предполагает сходимость двух рядов*, один из которых состоит из действительных, а другой из мнимых частей членов ряда: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + \boldsymbol{i}b_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \boldsymbol{i}\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\boldsymbol{i}^n}{n^2+n+1}$ сходится абсолютно, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n!} + \dfrac{\boldsymbol{i}}{n+1}\right)$ − расходится (за счет мнимой части).

Если действительная и мнимая части ряда сходятся абсолютно, то абсолютно сходится и сам ряд, т.к. $\sqrt{a^2+b^2} \le |a| + |b|$. Верно и обратное: из абсолютной сходимости комплексного ряда следует абсолютная сходимость действительной и мнимой части: $|a| \le \sqrt{a^2+b^2}$ *и* $|b| \le \sqrt{a^2+b^2}$.

Аналогично функциональным рядам в действительной области определяются комплексные функциональные ряды, область их поточечной и равномерной сходимости. Без изменения формулируется и доказывается *признак Вейерштрасса* равномерной сходимости. Сохраняются все свойства равномерно сходящихся рядов.

При исследовании функциональных рядов особый интерес представляют собой ***степенные ряды***: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, или после замены $\zeta = z - z_0$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n$. Как и в случае действительной переменной, верна ***теорема Абеля***: если степенной ряд (последний) сходится в т. $\zeta_0 \ne 0$, то он сходится, и притом абсолютно, для любого ζ, удовлетворяющего неравенству $|\zeta| < |\zeta_0|$.

Таким образом, *область сходимости* D этого *степенного ряда представляет собой круг радиуса* R *с центром в начале координат*, где R − ***радиус сходимости*** − точная верхняя грань значений $|\zeta_0|$ (Откуда и появился этот термин). Исходный степенной ряд будет, в свою очередь, сходиться в круге радиуса R с центром в т. z_0. При этом, в любом замкнутом круге $\overline{K} \subset D$ степенной ряд сходится абсолютно и равномерно (последнее утверждение сразу следует из признака Вейерштрасса (см. курс “Ряды”)).

Пример. Найти круг сходимости и исследовать на сходимость в тт. z_1 и z_2 степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1+2\boldsymbol{i})^{2n}}{4^n n}$, $z_1 = 0, z_2 = 1$. **Решение.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\left|\dfrac{(z-(1-2\boldsymbol{i}))^{2n}}{4^n n}\right|} < 1 \Rightarrow |z - (1-2\boldsymbol{i})| < 2 \Rightarrow$ область сходимости − круг радиуса $R = 2$ с центром в т. $z_0 = 1 - 2\boldsymbol{i}$. $z = z_1 = 0: |z_1 - z_0| = |1 - 2\boldsymbol{i}| = \sqrt{5} > 2 \Rightarrow$

z_1 лежит вне круга сходимости и ряд расходится. При $z = z_2 = 1$; $|z_2 - z_0| = |2\boldsymbol{i}| = 2$, т.е. точка лежит на границе круга сходимости. Подставив ее в исходный ряд, заключаем:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\boldsymbol{i})^{2n}}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ – ряд сходится условно по признаку Лейбница.

Если во всех граничных точках ряд сходится абсолютно или расходится по необходимому признаку, то это можно установить сразу для всей границы. Для этого следует подставить в ряд из модулей слагаемых значение R вместо выражения $|z - z_0|$ и исследовать полученный ряд.

Пример. Рассмотрим ряд из последнего примера, изменив один сомножитель: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1+2\boldsymbol{i})^{2n}}{4^n}$.

Область сходимости ряда осталась прежней: $|z-(1-2\boldsymbol{i})| < 2$. Подставим в ряд из модулей полученный радиус сходимости:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ – *ряд расходится по необходимому признаку на всей границе.*

Если обозначить сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ через $f(z)$, т.е. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ (естественно, в области сходимости), то этот ряд называют ***рядом Тейлора*** функции $f(z)$ или разложением функции $f(z)$ в ряд Тейлора. В частном случае, при $z_0 = 0$, ряд называется ***рядом Маклорена*** функции $f(z)$.

1.7 Определение основных элементарных функций. Формула Эйлера.

Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Если z – действительная переменная, то он представляет собой разложение функции e^z в ряд Маклорена и, следовательно, удовлетворяет характеристическому свойству показательной функции: $\varphi(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \sqrt{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)} \Leftrightarrow \varphi(t) = Ca^t$,

т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta)^n}{2^n n!} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!}}$. Это и является основанием для определения *экспоненциальной функции* в комплексной области :

Определение 1. $e^z \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathrm{K}$.

Аналогично определяются функции $\sin z$ *и* $\cos z$:

Определение 2. $\sin z \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$; $z \in \mathrm{K}$.

Все три ряда сходятся абсолютно и равномерно в любой ограниченной замкнутой области комплексной плоскости.

Из трех полученных формул простой подстановкой выводится ***формула Эйлера*:**

$$\boxed{e^{iz} = \cos z + \boldsymbol{i} \sin z}$$

Отсюда сразу получается ***показательная*** форма записи комплексных чисел:

$$z = a + b\boldsymbol{i} = r(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot e^{\arg z}.$$

Формула Эйлера устанавливает связь между обычной и гиперболической тригонометрией. Рассмотрим, например, функцию $f(z) = \cos z$: $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \mathrm{ch}\boldsymbol{i}z$. Аналогично получаются остальные соотношения. Итак:

$\cos(\boldsymbol{i}z) = \mathrm{ch}\, z$; $\sin(\boldsymbol{i}z) = \boldsymbol{i} \cdot \mathrm{sh}z$; $\mathrm{ch}(\boldsymbol{i}z) = \cos z$; $\mathrm{sh}(\boldsymbol{i}z) = \boldsymbol{i} \cdot \sin z$.

Примеры. Представить указанные выражения в виде $a + b\boldsymbol{i}$, *где* $a, b \in \Re$.

1. $\sin(\frac{\pi}{6}-2\boldsymbol{i})=\frac{1}{2}\cdot\cos(2\boldsymbol{i})-\sin(2\boldsymbol{i})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{ch}2-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \mathrm{sh}2.$

2. $\boldsymbol{i}^{i}=\left(1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{i}=e^{i^2\frac{\pi}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}}.$ (выражение в скобках представляет собой число $\boldsymbol{i}$, записанное в показательной форме)

3. $(-1)^{\sqrt{2}}=\left(1\cdot e^{i\pi}\right)^{\sqrt{2}}=e^{i\pi\sqrt{2}}=\cos\pi\sqrt{2}+\boldsymbol{i}\sin\pi\sqrt{2}.$

4. Найти линейно независимые решения линейного ДУ 2 – го порядка: $y''-4y'+13y=0.$

Корни характеристического уравнения равны:

$$k_{1,2}=2\pm3\boldsymbol{i}\Rightarrow \tilde{y}_1=e^{2x}(\cos3x+\boldsymbol{i}\sin3x),\tilde{y}_2=e^{2x}(\cos3x-\boldsymbol{i}\sin3x).$$

Так как мы ищем действительные решения уравнения, то в качестве фундаментальной системы решений можно взять функции $y_1=e^{2x}\cos3x$ *и* $y_2=e^{2x}\sin3x.$

Определим, в заключение, логарифмическую функцию комплексной переменной. Как и в действительной области, будем считать ее обратной к показательной. Для простоты рассмотрим только экспоненциальную функцию, т.е. решим уравнение $z=e^{w}$ относительно w, которую и назовем логарифмической функцией. Для этого прологарифмируем уравнение, представив z в показательной форме:

$$w=\ln z=\ln(|z|\cdot e^{\boldsymbol{i}\arg z})=\ln|z|+\boldsymbol{i}\cdot\arg z.$$

Если вместо $\arg z$ написать $\mathrm{Arg}\, z$ (1.2), то получим бесконечнозначную функцию $\mathrm{Ln}\, z=\ln|z|+\boldsymbol{i}\cdot\mathrm{Arg}\, z=\ln|z|+\boldsymbol{i}(\arg z+2\pi k), k=0,\pm1,\pm2,\ldots.$

1.8 Производная ФКП. Аналитические функции. Условия Коши – Римана.

Пусть $w=f(z)$ – однозначная функция, определенная в области $G\subset \mathrm{K}$.

Определение 1. ***Производной*** от функции $f(z)$ в точке $z\in G$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$\frac{dw}{dz}=f'(z)=\lim_{\Delta z\to0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

Функция, имеющая производную в точке z, называется ***дифференцируемой*** в этой точке.
Очевидно, что выполняются все арифметические свойства производных.

Пример. $f(z)=z^2; f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to0}(2z+\Delta z)=2z.$

С помощью формулы бинома Ньютона аналогично выводится, что $(z^n)'=n\cdot z^{n-1}, \forall n\in \mathrm{N}.$

Ряды для экспоненты, синуса и косинуса удовлетворяют всем условиям почленного дифференцирования. Непосредственной проверкой легко получить, что:

$(e^z)'=e^z$, $(\sin z)'=\cos z$, $(\cos z)'=-\sin z.$

Замечание. Хотя определение производной ФКП формально полностью совпадает с определением для ФДП, но, по существу, является более сложным (см. замечание в п. 1.5).

Определение 2. Функция $f(z)$, непрерывно дифференцируемая во всех точках области G, называется ***аналитической*** или ***регулярной*** в этой области.

Теорема 1. *Если функция $f(z)$ дифференцируема во всех точках области G, то она является аналитической в этой области.* (б/д)

Замечание. Фактически, эта теорема устанавливает эквивалентность регулярности и дифференцируемости ФКП на области.

Теорема 2. *Функция, дифференцируемая в некоторой области, имеет бесконечно много производных в этой области.* (б/д. Ниже (в п.2.4) это утверждение будет доказано при определенных дополнительных допущениях)

Представим функцию в виде суммы действительной и мнимой частей: $f(z)=u(x,y)+\boldsymbol{i}v(x,y).$

Теорема 3. (***Условия Коши − Римана*****).** Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в некоторой точке $z\in D$. Тогда функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют в этой точке частные производные, причем

$u'_x = v'_y$ и $u'_y = -v'_x$, называемые ***условиями Коши – Римана***.

Доказательство. Так как значение производной не зависит от способа стремления величины Δz к нулю, выберем следующий путь: $\Delta x \to 0, \Delta y = 0 \Rightarrow \Delta z = \Delta x + i \cdot 0 = \Delta x$. Получаем:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + \boldsymbol{i} \cdot \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} = u'_x + \boldsymbol{i} \cdot v'_y. \right.$$

Аналогично, при $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ имеем: $f'(z) = v'_y - \boldsymbol{i} \cdot u'_y$, что и доказывает теорему.

Верно и обратное утверждение:

Теорема 4. Если функции $u\ (x,y)$ и $v\ (x,y)$ имеют в некоторой точке непрерывные частные производные, удовлетворяющие условиям Коши – Римана, то сама функция $f\ (z)$ – дифференцируема в этой точке. (б/д)

Теоремы 1 – 4 показывают принципиальное отличие ФКП от ФДП.
Теорема 3 позволяет вычислять производную функции по любой из следующих формул:

$$f'(z) = u'_x + \boldsymbol{i} \cdot v'_x = v'_y - \boldsymbol{i} \cdot u'_y = u'_x - \boldsymbol{i} \cdot u'_y = v'_y + \boldsymbol{i} \cdot v'_x.$$

При этом можно считать x и y произвольными комплексными числами и вычислять производную по формулам: $f'(z) = u'_x + \boldsymbol{i}\, v'_x \big|_{\substack{x=z\\y=0}} = v'_y - \boldsymbol{i}\, u'_y \big|_{\substack{x=0\\y=z}}$.

Примеры. Проверить функцию на регулярность. Если функция регулярна – вычислить ее производную.

1. $f(z) = \sin 3z = \sin 3x \cdot \mathrm{ch} 3y + \boldsymbol{i} \cos 3x \cdot \mathrm{sh} 3y$; $u'_x = v'_y = 3\cos 3x \cdot \mathrm{ch} 3y$, $u'_y = -v'_x = 3\sin 3x \cdot \mathrm{sh} 3y \Rightarrow$ функция регулярна; $f'(z) = 3\cos 3x \cdot \mathrm{ch} 3y - 3\boldsymbol{i} \sin 3x \cdot \mathrm{sh} 3y$.
2. $f(z) = z + \overline{z} = 2x$; $u'_x = 2 \neq v'_y = 0 \Rightarrow$ функция не дифференцируема.

Замечание. Нетрудно видеть, что *любая действительная функция комплексного аргумента – не дифференцируема.*

1.9 Гармонические функции.

Напомним определение гармонических функций, данное в курсе «Теории поля» :

Определение. Функция $u\ (x,y)$ называется ***гармонической***, если она удовлетворяет уравнению Лапласа: $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, или $\Delta u = 0$.

Пусть на области G задана аналитическая функция $f(z) = u(x,y) + \boldsymbol{i} v(x,y)$. Эта функция удовлетворяет условиям Коши – Римана: $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$ (п. 1.8). Так как аналитическая функция бесконечно дифференцируема, то и функции u и v так же бесконечно дифференцируемы. Продифференцируем первое условие по x, второе по y и сложим полученные равенства:

$u''_{xx} + u''_{yy} = v''_{yx} - v''_{xy} = 0$, т.е. действительная часть аналитической функции – гармоническая. Если условия продифференцировать по y, по x и вычесть, то легко убедиться в гармоничности мнимой части. Таким образом, доказана

Теорема. *Действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими*:

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \ \ и \ \ v''_{xx} + v''_{yy} = 0.$$

Ясно, что две произвольные гармонические функции, вообще говоря, не будут действительной и мнимой частями некоторой аналитической функции. Для этого они должны еще удовлетворять условиям Коши – Римана. Однако, по любой гармонической функции можно с точностью до константы определить вторую часть аналитической функции (т.е. саму аналитическую функцию).

Пример. Доказать, что $u(x,y) = \mathrm{ch} 2x \cdot \cos 2y$ может быть действительной частью аналитической функции и определить эту функцию.

Решение. 1. $u''_{xx} + u''_{yy} = 4\mathrm{ch} 2x \cdot \cos 2y - 4\mathrm{ch} 2x \cdot \cos 2y = 0 \Rightarrow u(x,y) -$ *гармоническая функция.*

2. $v'_y = u'_x = 2\text{sh}2x\cdot\cos 2y;\ v = 2\text{sh}2x\int\cos 2y dy = \text{sh}2x\cdot\sin 2y + C(x).$

Из 2-го условия К – Р: $2\text{ch}2x\cdot\sin 2y + C'(x) = 2\text{ch}2x\cdot\sin 2y \Rightarrow C'(x) = 0 \Rightarrow C = const.$

$f(z) = \text{ch}2x\cdot\cos 2y + \boldsymbol{i}\cdot\text{sh}2x\cdot\sin 2y = \text{ch}(2x + 2\boldsymbol{i}y) = \text{ch}2z.$

Вопросы для самопроверки.

1. Являются ли следующие множества точек областями?

1) $2 < |z-3| < 4$; 2) $0 < \arg z < \pi/3$; 3) $|z| < 1 \cap |z| \ge 3$; 4) $0 < \operatorname{Im} z \le 1$;

2. Записать комплексные числа в тригонометрической и показательной форме.

1) $z = -3$; 2) $z = 2\boldsymbol{i}$; 3) $z = 3 - 4\boldsymbol{i}$;

3. Доказать тождество: $\text{ch}^2 z - \text{sh}^2 z = 1$.

4. Является ли функция $f(z) = z\cdot\operatorname{Re} z$ аналитической?

2 Интегральное исчисление функций комплексной переменной.

2.1 Интегралы в комплексной области.

Пусть функция $f(z) = u(x,y) + \boldsymbol{i}v(x,y)$ непрерывна в области G, а L – гладкая кривая, лежащая в этой области, заданная уравнением $z(t) = x(t) + \boldsymbol{i}y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$; $z(\alpha) = A, z(\beta) = B$. Кривую будем считать ориентированной, если заданы начальная и конечная точки кривой. При этом, положительное направление задается изменением параметра t от меньшего значения к большему (т.е. A – начало кривой, B – конец).

Напомним, что кривая называется ***гладкой***, если у нее существует непрерывная касательная в каждой точке, что эквивалентно наличию непрерывных производных $x'(t)$ *и* $y'(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, не равных нулю одновременно. Необходимо сделать замечание относительно ориентации замкнутых кривых, так как начальная и конечная точки в этом случае совпадают. Если замкнутый контур без самопересечений целиком лежит в некоторой области, то обход контура называют ***положительным*** при движении *против* часовой стрелки.

При этом контур обозначают Γ^+ или просто Γ (по умолчанию). В противном случае ориентация контура называется ***отрицательной*** и обозначается Γ^-. Если же контур является границей области, то его обход называется положительным в том случае, когда область при движении остается слева. Например, положительный обход области $|z-2| < 3$ идет против часовой стрелки, а области $|z-2| > 3$ – по часовой. По умолчанию, обход области по границе всегда будем считать положительным.

Определение. ***Интегралом*** от функции комплексной переменной по кривой L называется:

$$I = \int_L f(z)dz = \int_L (u + \boldsymbol{i}v)(dx + \boldsymbol{i}dy) = \int_L (udx - vdy) + \boldsymbol{i}\int_L (vdx + udy).$$

Таким образом, *интеграл от комплексной функции равен сумме двух криволинейных* интегралов *второго рода* (см. курс «Теория поля»), которые, в свою очередь, сводятся к вычислению двух обыкновенных интегралов: $I = \int_\alpha^\beta [u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)]dt +$

$$+\ \boldsymbol{i}\int_\alpha^\beta [u(x(t),y(t))y'(t) + v(x(t),y(t))x'(t)]dt\ = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt.$$

Примеры. Вычислить интегралы:

1. $\int_{(AB)} \bar{z}dz$; $(AB): y = x^2, 0 \le x \le 1$. **Решение.** $I = \int_0^1 (x + 2x^3)dx + \boldsymbol{i}\,x^2dx = 1 + \dfrac{\boldsymbol{i}}{3}$.

2. $\int_L \dfrac{1}{z - z_0}dz$ и $\int_L (z - z_0)^n dz$ $(n \in \mathrm{N})$ по окружности L радиуса R с центром в т. z_0.

Решение. Запишем уравнение окружности в виде:

$z - z_0 = R \cdot e^{i \cdot t}$, $0 \le t < 2\pi$ (*ясно, что* $|z - z_0| = R\ \forall t$, *т.е.* $L -$ *окружность*). Отсюда:

1) $\displaystyle\int_L \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{R \cdot \boldsymbol{i} \cdot e^{it} dt}{R \cdot e^{it}} = \boldsymbol{i} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \boldsymbol{i}$.

2) $\displaystyle\int_L (z-z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} R^{n+1}\, \boldsymbol{i}\, e^{i(n+1)t} dt = \boldsymbol{i}\, R^{n+1} \left. \frac{e^{i(n+1)t}}{\boldsymbol{i}(n+1)} \right|_0^{2\pi} = 0.$

Замечание. Значение интегралов во втором примере *не зависят* от радиуса окружности.

2.2 Теория интегрирования Коши.

Примеры предыдущего пункта во-первых показывают существенное отличие интегрирования в комплексной области от интегрирования в действительной и во-вторых легко обобщаются.

Теорема Коши. Пусть $f(z)$ − аналитическая функция в односвязной области D, а $\Gamma -$ любой кусочно – гладкий замкнутый контур, принадлежащий этой области. Тогда интеграл от функции $f(z)$ по контуру Γ равен нулю: $\displaystyle\int_\Gamma f(z) dz = 0.$

Доказательство. Так как f − аналитическая функция, то ее действительная и мнимая части удовлетворяют условиям Коши – Римана: $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$, откуда сразу следует, что подынтегральные выражения $udx - vdy$ и $vdx + udy$ (п.2.1) представляют собой полные дифференциалы (см. ФНП) и, следовательно, соответствующие криволинейные интегралы по замкнутому контуру (см. ТП) равны нулю $\Rightarrow \displaystyle\int_\Gamma f(z) dz = 0.$ (Пример 2.2 §10).

Доказанная теорема легко обобщается на многосвязные области.

Теорема. Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в многосвязной области $\bar{D}$, ограниченной ориентированным контуром Γ. В этом случае $\displaystyle\int_\Gamma f(z) dz = 0.$

Доказательство (для двусвязной области (Рис.2)):
Область D ограничена контуром $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, ориентированным в положительном направлении. Соединим контуры Γ_1 и Γ_2 линией γ. Ориентируем γ двумя способами: γ^+ и γ^-. В результате получим односвязную область, ограниченную контуром $\Gamma_1 + \gamma^+ + \Gamma_2 + \gamma^-$. По теореме Коши

$\displaystyle\int_{\Gamma_1 + \gamma^+ + \Gamma_2 + \gamma^-} f(z) dz = 0.$ Так как $\displaystyle\int_{\gamma^+} fdz + \int_{\gamma^-} fdz = 0,$ получаем:

$\displaystyle\int_\Gamma fdz = \int_{\Gamma_1} fdz + \int_{\Gamma_2} fdz = 0.$ В общем случае $\displaystyle\int_\Gamma fdz = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{\Gamma_k} fdz = 0.$

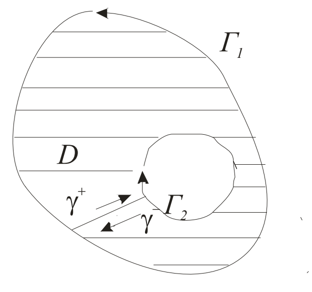


Рис.2

При этом, каждый из интегралов $\displaystyle\int_{\Gamma_k} f(z) dz$ может быть и не равным нулю.

Обозначим буквой Γ кусочно – гладкий замкнутый контур, ориентированный против часовой стрелки, а тот же контур, ориентированный по часовой стрелке − символом Γ^- (в этих обозначениях в последней теореме следовало бы писать Γ_1 и Γ_k^-, $\forall k > 1$).

Следствие. Пусть область D ограничена внешним контуром Γ и внутренними контурами $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$. В последних обозначениях, для аналитической на $\bar{D}$ функции имеет место равенство: $\displaystyle\int_\Gamma fdz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} fdz.$

Доказательство. В указанных обозначениях утверждение теоремы имеет вид: $\displaystyle\int_\Gamma fdz + \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k^-} fdz = 0.$ Отсюда: $\displaystyle\int_\Gamma fdz = -\sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k^-} fdz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} fdz.$

Замечание. Из полученных результатов следует, что примеры п.2.1 верны для любого кусочно – непрерывного замкнутого контура Γ, содержащего точку z_0 : $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi \boldsymbol{i}$ и $\int\limits_{\Gamma} (z-z_0)^n\,dz = 0.$

2.3 Формула Коши.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области G, а z_0 – произвольная внутренняя точка этой области. Построим замкнутый контур $\Gamma \subset G$ и содержащий эту точку.

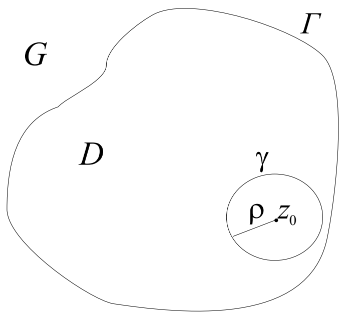


Рис.3

Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$. Эта функция регулярна во всех точках области D ограниченной контуром Γ, за исключением т. z_0. Проведем окружность γ с центром в т. z_0 радиуса ρ, целиком принадлежащую области D. Если оба контура ориентировать против часовой стрелки, то будет иметь место равенство: $\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ (п.2.2). Так как левая часть равенства не зависит от ρ, то и правая от ρ не зависит. На контуре γ $z = z_0 + \rho e^{it}$ и интеграл в правой части будет равен:

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \boldsymbol{i}\int\limits_0^{2\pi} f(z)dt = \boldsymbol{i}\int\limits_0^{2\pi} [f(z)-f(z_0)]dt + \boldsymbol{i}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0)dt = \boldsymbol{i}\int\limits_0^{2\pi} [f(z)-f(z_0)]dt + 2\pi \boldsymbol{i} f(z_0).$$

Подынтегральная функция в последнем интеграле стремится к нулю при $\rho \to 0$, а сам интеграл от ρ не зависит. Отсюда сразу следует, что этот интеграл равен нулю (если предел постоянной – ноль , то постоянная равна нулю). Окончательно получаем ***формулу Коши***:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi \boldsymbol{i} \cdot f(z_0) \qquad (2.1)$$

Формулу Коши можно написать для произвольной точки $z_0 \in G$, не принадлежащей контуру Γ:

$$\frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \begin{cases} f(z_0),\ z_0 - \textit{внутри } \Gamma \\ 0 \qquad ,\ z_0 - \textit{вне } \Gamma \end{cases}$$

(равенство нулю сразу следует из теоремы Коши (п.2.2)).
Выражение, стоящее в левой части последней формулы, называют ***интегралом Коши***.

2.4 Следствия интегральной формулы Коши.

Рассмотрим односвязную область G , ограниченную замкнутым контуром Γ. Пусть задана функция $\varphi(z,\zeta), z \in G, \zeta \in \Gamma$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\varphi(z,\zeta)$ для $\forall \zeta \in \Gamma$ является аналитической функцией переменной z в области G.
2. Функции $\varphi(z,\zeta)$ *и* $\frac{\partial \varphi(z,\zeta)}{\partial z}$ непрерывны по совокупности переменных z и ζ $\forall z \in G, \zeta \in \Gamma$.

В этом случае существует функция $F(z) = \int\limits_{\Gamma} \varphi(z,\zeta)\,d\zeta$ как интеграл, зависящий от параметра z, определенная для $\forall z \in G$.
Можно доказать, что при указанных предположениях $F(z)$ является аналитической функцией комплексной переменной z во всей области G , причем производную этой функции можно вычислять под знаком интеграла.

Рассмотрим теперь произвольную замкнутую подобласть $\bar{D} \subset G$, расстояние от всех точек которой до границы Γ больше некоторого положительного числа d : $|z-\zeta| \geq d$. Функция $\varphi(z,\zeta) = \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, *где* $f(z)$ − функция, аналитическая в области G, удовлетворяет условиям (1) и (2) $\forall z \in G$. В свою очередь, функция $f(z)$ во всех точках области D представляется интегралом Коши: $f(z) = \dfrac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \int\limits_{\Gamma} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ (формула (2.1)). Пользуясь предыдущим утверждением, вычислим ее производную с помощью дифференцирования под знаком интеграла:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta .$$

Повторяя данные рассуждения, окончательно получим:
Аналитическая в области G функция бесконечно дифференцируема в этой области, а ее производные удовлетворяют соотношению:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \boldsymbol{i}} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \text{или} \quad \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi \boldsymbol{i}}{n!} f^{(n)}(z_0) .$$

Полученные формулы часто используются при вычислении интегралов.

Пример. Вычислить интегралы: $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin z}{z + \boldsymbol{i}} dz$ и $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=3} \frac{\text{sh} z}{(z-1)^2} dz$.

Решение. 1. Точка $z = -\boldsymbol{i}$ лежит внутри данной окружности, а функция $f(z) = \sin z$, поэтому $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin z}{z + \boldsymbol{i}} dz = 2\pi \boldsymbol{i} \sin(-\boldsymbol{i}) = 2\pi \text{sh} 1$.

2. $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=3} \frac{\text{sh} z}{(z-1)^2} dz = \frac{2\pi \boldsymbol{i}}{1!} (\text{sh} z)'\big|_{z=1} = 2\pi \boldsymbol{i} \text{ch} 1$.

Можно вычислять интегралы и в том случае, когда подынтегральная функция имеет несколько указанных особенностей в точках, лежащих внутри контура интегрирования, используя следствие теоремы Коши (§11). При этом необходимо учитывать, что регулярные части функции будут отличаться друг от друга в каждой особой точке.

Пример. $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=3} \frac{\text{sh} z}{z^2+1} dz = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\text{sh} z dz}{(z-\boldsymbol{i})(z+\boldsymbol{i})} + \int\limits_{\gamma_2} \frac{\text{sh} z dz}{(z-\boldsymbol{i})(z+\boldsymbol{i})} = 2\pi \boldsymbol{i} \left(\frac{\text{sh} z}{z+\boldsymbol{i}}\bigg|_{z=i} + \frac{\text{sh} z}{z-\boldsymbol{i}}\bigg|_{z=-i} \right) = 2\pi \boldsymbol{i} \sin 1$.

2.5 Ряды Тейлора и Маклорена.

В п.1.6 были введены понятия рядов Тейлора и Маклорена функции $f(z)$. Рассмотрим теперь более подробно свойства этих рядов. Для определенности, будем рассматривать только ряды Тейлора. Итак, пусть функция $f(z)$ равна сумме некоторого степенного ряда в области его сходимости: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, $|z - z_0| < R$. Так как степенной ряд равномерно сходится в любом замкнутом круге $\bar{K} \subset D$ (D − область сходимости) , то $f(z)$ является непрерывной , бесконечно дифференцируемой функцией (как сумма непрерывных и бесконечно дифференцируемых функций). Отсюда сразу следует, что $f(z)$ − аналитическая функция в указанной области $\bar{K}$. Имеет место и обратное утверждение:

Теорема Тейлора. Функция $f(z)$, аналитическая внутри круга $|z - z_0| < R$, может быть однозначно представлена в этом круге сходящимся степенным рядом $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

Доказательство. Пусть $z -$ произвольная внутренняя точка круга сходимости D. Построим окружность $\Gamma \subset D$ с центром в т. z_0, так, чтобы т. z лежала внутри этой окружности. По формуле Коши имеем: $f(z) = \frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ (п.2.1). Представим подынтегральную функцию в виде ряда бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n}$$

и проинтегрируем полученный ряд почленно (в силу равномерной сходимости ряда): $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) \cdot (z - z_0)^n$. Используя следствие интегральной формулы Коши (п.2.4), полученный ряд можно написать следующим образом: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$.

Если предположить, что существует некоторый степенной ряд, сходящийся к той же функции: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, то последовательно дифференцируя это равенство, получим $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, что и доказывает единственность разложения.

Замечание. В действительной области бесконечной дифференцируемости функции недостаточно для разложимости в ряд Тейлора ($f(x) = \exp(-1/x^2)$).

Пример. Написать разложение в ряд Маклорена функции $f(z) = (1 + z)^\alpha$ и определить его радиус сходимости. **Решение.** Производная любого порядка в т. $z = 0$ легко вычисляется: $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1).$ Отсюда: $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!} \cdot z^n$. Радиус сходимости находится по признаку Даламбера: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha \cdot \ldots \cdot (\alpha - n) z^{n+1} n!}{(n+1)! \alpha \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1) z^n} \right| = |z| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha - n}{n + 1} \right| = |z| < 1 \Rightarrow R = 1.$

(область сходимости обусловлена тем, что в т. $z = 1$ функция не является аналитической)

2.6 Ряды Лорана.

При исследовании функций комплексной переменной большую роль играют ряды по степеням $(z - z_0)$ более общего вида нежели рассмотренные ранее.

Определение. *Рядом Лорана* называется ряд $L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

Т.е. суммируются *все целые степени* бинома $(z - z_0)$. Поэтому ряды Лорана обычно записывают следующим образом: $L = S_1 + S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$. Необходимым и достаточным условием сходимости ряда Лорана является, очевидно, одновременная сходимость рядов S_1 и S_2. Ряд S_1 представляет собой обычный степенной ряд (п. 1.6) и сходится в круге радиуса R_1 с центром в т. z_0 : $|z - z_0| < R_1$. Для исследования второго ряда (S_2), сделаем замену переменных: $\frac{1}{z - z_0} = \zeta$. Получившийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n$ является степенным рядом и сходится в области $|\zeta| < R_2^*$. Возвращаясь к исходной переменной, получим: $\frac{1}{|z - z_0|} < R_2^* \Rightarrow |z - z_0| > \frac{1}{R_2^*} = R_2$. Если $R_2 > R_1$, то соответствующий ряд Лорана расходится во всех точках комплексной плоскости. Если же $R_2 < R_1$, то областью сходимости будет кольцо $R_2 < |z - z_0| < R_1$. Имеет место следующая теорема:

Теорема. Функция $f(z)$, *аналитическая в круговом кольце* $R_2 < |z - z_0| < R_1$, *однозначно представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана*. (б/д)

Пример. Найти все разложения функции $f(z) = \dfrac{8z-4}{(4+z)(2-z)^2}$ по степеням z.

Решение. Представим функцию следующим образом:

$$f(z) = \frac{z}{(2-z)^2} - \frac{1}{4+z} = \frac{z}{4(1-z/2)^2} - \frac{1}{4(1+z/4)}.$$

1) Каждое из слагаемых разложим в степенной ряд, пользуясь результатом примера §14:

$f(z) = S_1 + S_2 = \dfrac{1}{4}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)z^{n+1}}{2^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{z^n}{4^n}\right)$. Ряд S_1 сходится в круге $|z|<2$,

ряд S_2 – в круге $|z|<4$. После несложных преобразований получаем:

$f(z) = \dfrac{1}{4}\left(-1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2^{n-1}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{4^n}\right)z^n\right)$ − ряд Маклорена, сходящийся в круге $|z|<2$.

2) Разложим функцию относительно бесконечно удаленной точки, сделав преобразование $z = \dfrac{1}{\zeta}$: $f^*(\zeta) = \zeta\left(\dfrac{1}{(1-2\zeta)^2} - \dfrac{1}{1+4\zeta}\right) = S_1^* + S_2^* = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n\zeta^{n+1} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}4^n\zeta^{n+1}$.

Область сходимости первого ряда $|\zeta|<\dfrac{1}{2}$, второго – $|\zeta|<\dfrac{1}{4}$. Вернувшись к исходной

переменной, получим: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^n(n+1) + 4^n(-1)^{n+1})\dfrac{1}{z^{n+1}}$ − ряд Лорана, написанный только

по отрицательным степеням z, сходящийся в области $|z| > 4$.

3) Если теперь сложить ряды S_1^* и S_2 (S_1^* равен первому, а S_2 − второму слагаемому исходной функции), то мы получим полный ряд Лорана, сходящийся в кольце $2 < |z| < 4$:

$$f(z) = S_1^* + S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}\frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{4^{n+1}}.$$

Используя следствия интегральной формулы Коши (п.2.4), коэффициенты ряда Лорана могут быть представлены в интегральной форме. Для этого проведем две окружности C_1 и C_2 с центрами и т. z_0, радиусы которых удовлетворяют условию $R_2 < r_2 < r_1 < R_1$. Тогда

$c_n = \dfrac{1}{2\pi \boldsymbol{i}}\int\limits_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где C – произвольный замкнутый контур, лежащий между окружностями C_1 и C_2 и содержащий т. z_0.

2.7 Изолированные особые точки аналитической функции.

Определение. Точка z_0 называется ***изолированной особой точкой*** функции $f(z)$, если $f(z)$ − однозначная и аналитическая функция в круговом кольце $0 < |z - z_0| < R$, а т. z_0 является особой точкой функции $f(z)$. При этом, в самой т. z_0 функция может быть не определена.

По теореме предыдущего параграфа функция $f(z)$ может быть представлена в данном кольце сходящимся рядом Лорана. Возможны три случая:

1. В разложении функции нет слагаемых с отрицательными степенями.
2. Слагаемых с отрицательными степенями конечное число.
3. В разложении присутствует бесконечно много слагаемых с отрицательными степенями.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1) Ряд Лорана *не содержит отрицательных степеней величины* $(z - z_0)$: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

Можно доказать, что в этом случае существует предел $f(z)$ *при* $z \to z_0$ равный c_0. Если доопределить (или переопределить) функцию в т. z_0 значением c_0, то мы получим функцию, аналитическую в круге $|z - z_0| < R$. Поэтому особые точки рассмотренного вида называют ***устранимыми особыми точками***. Если разложение начинается с k-ой степени ($k > 0$), то точку z_0 называют ***нулем k-го порядка*** функции $f(z)$.

2) Ряд Лорана *содержит конечное число* отрицательных степеней: $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

При выполнении указанного условия точку z_0 называют ***полюсом m-го порядка***. Доказывается, что предел аналитической функции при $z \to z_0$ в этом случае будет равен ∞.

Легко видеть, что функция $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ в т. z_0 в первом случае будет иметь полюс k-го порядка, а во втором – ноль m – го порядка.

3) Ряд Лорана содержит бесконечное число слагаемых членов разложения в отрицательных степенях. Точка z_0 называется в этом случае ***существенно особой точкой*** функции $f(z)$.

Поведение функции в окрестности существенно особой точки описывается теоремой:

Теорема. Для любого числа C и любого $\varepsilon > 0$ в любой окрестности z_0 найдется точка, значение функции в которой будет отличаться от C (по модулю) меньше чем на ε, т.е.:

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall C \in \mathrm{K}\ \forall \delta > 0\ \exists z_1 (|z_1 - z_0| < \delta) \Rightarrow |f(z_1) - C| < \varepsilon. \text{ (б/д)}$$

Для всех сформулированных утверждений верны обратные. Поэтому часто используют геометрическую классификацию изолированных особых точек z_0:

Точка z_0 называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел функции при $z \to z_0$. Ряд Лорана не содержит отрицательных степеней величины $(z - z_0)$.

Точка z_0 называется ***полюсом*** функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Ряд Лорана содержит конечное число отрицательных степеней величины $(z - z_0)$.

Точка z_0 называется ***существенно особой точкой*** функции $f(z)$, если при $z \to z_0$ предела не существует (конечного или бесконечного). Ряд Лорана содержит бесконечное число отрицательных степеней величины $(z - z_0)$.

2.8 Бесконечно удаленная особая точка.

Определение. Бесконечно удаленная точка комплексной плоскости называется ***изолированной особой точкой*** однозначной аналитической функции $f(z)$, если вне круга некоторого радиуса R, т.е. при $|z| > R$, нет ни одной конечной особой точки функции $f(z)$.

Для исследования функции в бесконечно удаленной точке сделаем замену $z = \dfrac{1}{\zeta}$. Функция $f(1/\zeta)$ будет иметь особенность в точке $\zeta = 0$, причем эта точка будет изолированной, так как внутри круга $|\zeta| < \dfrac{1}{R}$ других особых точек по условию нет. Являясь аналитической в этом круге (за исключением т. $\zeta = 0$), функция $f(1/\zeta)$ может быть разложена в ряд Лорана по степеням ζ. Классификация, описанная в предыдущем параграфе полностью сохраняется. Однако, если вернуться к исходной переменной z , то ряды по положительным и отрицательным степеням z 'поменяются' местами. Т.е. классификация бесконечно удаленных точек будет выглядеть следующим образом:

1) Ряд Лорана функции $f(z)$ *не имеет слагаемых с положительными степенями*: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{z^n} \Rightarrow z = \infty$ – *устранимая особая точка*: $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = c_0$. Если, при этом, сумма начинается с $n = m > 0$, то $z = \infty$ ноль m–го порядка.

2) Ряд Лорана функции $f(z)$ *имеет конечное число слагаемых с положительными степенями*: $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{m} c_n z^n \Rightarrow z=\infty$ *− полюс* m−го *порядка*: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$.

3) Ряд Лорана функции $f(z)$ *имеет бесконечное число слагаемых с положительными* степенями: $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \Rightarrow z=\infty$ *существенно особая точка*. Вне любого круга радиуса R функция $f(z)$ принимает все комплексные значения.

Примеры. 1. $f(z)=\sum\limits_{n=-3}^{\infty}(n+1)(z-\boldsymbol{i})^n$. Точка $z=\boldsymbol{i}$ − полюс 3-го порядка.

2. $f(z)=\sin z=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}$. Точка $z=\infty$ − существенно особая точка.

2.9 Вычет аналитической функции в изолированной особой точке.

Пусть точка z_0 является изолированной особой точкой однозначной аналитической функции $f(z)$. Согласно предыдущему, в окрестности этой точки $f(z)$ может быть представлена единственным образом рядом Лорана : $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, где $c_n=\dfrac{1}{2\pi\boldsymbol{i}}\int\limits_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$.

Определение. ***Вычетом*** аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, равное значению интеграла $\dfrac{1}{2\pi\boldsymbol{i}}\int\limits_\gamma f(\zeta)d\zeta$, взятому в положительном направлении по любому замкнутому контуру, лежащему в области аналитичности функции и содержащему внутри себя единственную особую точку z_0.

Вычет обозначается символом Res $[f(z), z_0]$.

Нетрудно видеть, что вычет в *правильной или устранимой особой точке равен нулю*.

В *полюсе или существенно особой точке вычет равен коэффициенту* c_{-1} *ряда Лорана*:

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi\boldsymbol{i}}\int\limits_C f(\zeta)d\zeta=c_{-1} .$$

Пример. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$, $z_0=\boldsymbol{i}$.

Решение. Пусть $t=z-\boldsymbol{i}\Rightarrow f^*(t)=\dfrac{e^{it-1}}{t(t+2\boldsymbol{i})}=\dfrac{e^{it}}{t2e\boldsymbol{i}(1-\frac{\boldsymbol{i}t}{2})}=\dfrac{1}{2e\boldsymbol{i}}\cdot\dfrac{1}{t}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\boldsymbol{i}t)^n}{n!}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{\boldsymbol{i}t}{2}\right)^n$. Легко видеть, что коэффициент c_{-1} получится при умножении слагаемых при $n=0$: Res$[f(z),\boldsymbol{i}]=c_{-1}=-\dfrac{\boldsymbol{i}}{2e}$.

Часто удается вычислять вычеты функций более простым способом. Пусть функция $f(z)$ имеет в т. z_0 полюс первого порядка. В этом случае разложение функции в ряд Лорана имеет вид (§16): $f(z)=c_{-1}/(z-z_0)+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots$. Умножим это равенство на $(z-z_0)$ и перейдем к пределу при $z\to z_0$. В результате получим: Res$[f(z), z_0]=c_{-1}=\lim\limits_{z\to z_0}((z-z_0)\cdot f(z))$. Так, в последнем примере имеем Res$[f(z),\boldsymbol{i}]=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{e^{iz}}{z+\boldsymbol{i}}=-\dfrac{\boldsymbol{i}}{2e}$.

Для вычисления вычетов в полюсах более высокого порядка следует умножить функцию на $(z-z_0)^m$ (m − порядок полюса) и продифференцировать полученный ряд $(m-1)$ раз.

В этом случае имеем: Res$[f(z), z_0]=\dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$.

Пример. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{\cos z}{z(z+1)^2}$ в т. z = −1.

Решение. $\operatorname{Res}[f(z),-1]=\dfrac{1}{1!}\lim\limits_{z\to-1}\dfrac{d}{dz}[\dfrac{\cos z}{z}]=\lim\limits_{z\to-1}\dfrac{-z\cdot\sin z+\cos z}{z^2}=\cos 1-\sin 1=\sqrt{2}\cos(1+\dfrac{\pi}{4})$

2.10 Применение вычетов к вычислению интегралов. (Основная теорема теории вычетов)

Из определения предыдущего параграфа непосредственно следует, что *интеграл от аналитической функции по замкнутому контуру, содержащему внутри себя единственную особую точку выражается через вычет в этой точке*: $\int\limits_C f(\zeta)d\zeta=2\pi\boldsymbol{i}\operatorname{Res}[f(z),z_0]$. Эта формула легко обобщается следующей теоремой.

Теорема (*Основная теорема теории вычетов*). Пусть функция $f(z)$ является аналитической всюду в ограниченной замкнутой области G с границей Γ за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k ($k = 1,2,\ldots,n$), лежащих внутри области. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma^+} f(\zeta)d\zeta=2\pi\boldsymbol{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k].$$

Доказательство. Выделим каждую особую точку z_k замкнутым контуром γ_k, лежащим в области G и содержащим внутри себя эту точку (рис.4).

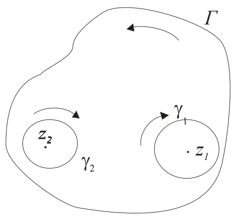


Рис.4

Функция $f(z)$ является аналитической в области, ограниченной контурами Γ и $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$. По следствию теорем п. 2.2 верна формула $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz=\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_k} f(z)dz$. Отсюда и из предыдущего параграфа следует утверждение теоремы.

Данная формула часто используется для вычисления интегралов от комплексных функций.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_C \dfrac{\sin z dz}{z^2+1}$, где C − окружность $|z-1|=4$.

Решение. Функция имеет два полюса первого порядка, лежащие внутри окружности C. Оба вычета легко определяются (п.2.10). Итак: $\int\limits_C \dfrac{\sin z}{z^2+1}dz=2\pi\boldsymbol{i}(\operatorname{Res}(f(z),\boldsymbol{i})+\operatorname{Res}(f(z),-\boldsymbol{i}))=$

$$=2\pi\boldsymbol{i}\left(\left.\frac{\sin z}{z+\boldsymbol{i}}\right|_{z=i}+\left.\frac{\sin z}{z-\boldsymbol{i}}\right|_{z=-i}\right)=2\pi\boldsymbol{i}\frac{\sin\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{i}}=2\pi\boldsymbol{i}\cdot\operatorname{sh}1.$$

2.11 Вычет функции в бесконечно удаленной особой точке.

Определение. Вычетом аналитической функции $f(z)$ в точке $z=\infty$ называется значение интеграла $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\dfrac{1}{2\pi\boldsymbol{i}}\int\limits_{C^-} f(\zeta)d\zeta=-\dfrac{1}{2\pi\boldsymbol{i}}\int\limits_{C^+} f(\zeta)d\zeta$, где C – произвольный замкнутый контур, вне которого $f(z)$ – аналитическая и не имеет особых точек, отличных от ∞. Фактически, контур C^- является границей окрестности бесконечно удаленной точки, при обходе которой область остается слева. В силу определения коэффициентов ряда Лорана получаем: $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\dfrac{1}{2\pi\boldsymbol{i}}\int\limits_{C^+} f(\zeta)d\zeta=-c_{-1}$.

Пример. Вычислить $\operatorname{Res}\left[\dfrac{e^{iz}}{z^3},\infty\right]$.

Решение. $\dfrac{e^{iz}}{z^3}=\dfrac{1}{z^3}\left(1+\boldsymbol{i}z-\dfrac{z^2}{2}-\dfrac{\boldsymbol{i}z^3}{3!}+\ldots\right)$; $c_{-1}=-\dfrac{1}{2}$; $\operatorname{Res}[f,\infty]=-c_{-1}=\dfrac{1}{2}$.

Из полученных формул следует утверждение:

Теорема. Пусть функция $f(z)$ регулярна на расширенной комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1,\ldots,z_{n-1}$, $z_n=\infty$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]=0.$$

Доказательство. Пусть контур C содержит внутри себя все конечные особые точки. В силу теоремы из п.2.11 и последней полученной формулы имеем: $\frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}}\int\limits_{C^+} f(\zeta)d\zeta=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mathrm{Res}[f(z),z_k]=-\mathrm{Res}[f(z),\infty]$. Из второй части равенства следует утверждение теоремы.

Пример. Рассмотрим последний пример: $\mathrm{Res}[f,0]=\frac{1}{2}\left(e^{iz}\right)''_{z=0}=-\frac{1}{2}e^{iz}\Big|_{z=0}=-\frac{1}{2}=-\mathrm{Res}[f,\infty]$,

т.е. сумма всех вычетов расширенной комплексной плоскости равна нулю.

Выведенная формула может быть записана следующим образом:

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{Res}[f(z),z_k].$$

В такой форме она применяется как при вычислении вычета в бесконечно удаленной точке, так и справа налево при вычислении интегралов в том случае, когда внутри контура C находится несколько полюсов высокого порядка, а вычет в бесконечно удаленной точке может быть найден достаточно просто непосредственно.

Замечание. Из последней формулы следует, что *вычет функции, имеющей в бесконечно удаленной точке устранимую особенность, может быть отличным от нуля.*

Вопросы для самопроверки.

1. При каком условии $\int\limits_C f(z)dz$ не зависит от пути интегрирования?
2. Применима ли формула Коши для вычисления интеграла $\int\limits_L \frac{e^z dz}{z(z-4)}$, где $L:|z-2|=\frac{3}{2}$.
3. Какова связь между нулями и полюсами функции?
4. Чему равна сумма вычетов функции во всех конечных особых точках?

3. Операционное исчисление.

В этом разделе рассматривается одно из основных приложений ТФКП - решение дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и с частными производными).

3.1 Интеграл Фурье

Напомним основные результаты разложения функций в тригонометрические ряды Фурье.

Пусть в промежутке $(-l,l)$ функция $f(t)$ удовлетворяет ***условиям Дирихле***, а именно:

а) *ограничена на этом отрезке*;

б) *кусочно-непрерывна на нем* (имеет конечное число точек разрыва первого рода);

в) *кусочно-монотонная* (в частности, имеет лишь конечное число экстремумов).

Из теории тригонометрических рядов следует, что ряд

$$S(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nt}{l}+b_n\sin\frac{\pi nt}{l}\right) \qquad (3.1)$$

представляет собой периодическую функцию с периодом $2l$ и сходится к функции $f(t)$ на интервале $(-l,l)$. По теореме Дирихле:

1) в точках непрерывности сумма ряда равна значению функции: $S(t)=f(t)$;

2) в точках разрыва t_1 сумма ряда $S(t_1)=\dfrac{f(t_1-0)+f(t_1+0)}{2}$ (включая концы интервала, если $f(-l)\neq f(l)$).

Коэффициенты ряда (1.1) определяются по формулам Эйлера-Фурье:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\frac{\pi n\tau}{l}d\tau \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\tau)\sin\frac{\pi n\tau}{l}d\tau \end{aligned}\right\} (n=0,1,2,\dots) \tag{3.2}$$

Мы будем рассматривать полученный ряд Фурье *только* на интервале $(-l,l)$. В этом случае формулу (3.1) можно написать в виде: $f(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{\pi nt}{l}+b_n\sin\dfrac{\pi nt}{l}\right)$ (3, 1′)

Легко видеть, что коэффициенты a_n и b_n удовлетворяют условиям: $a_{-n}=a_n$, $b_{-n}=-b_n$ $(n=0,1,2,...)$. Поэтому формула (3,1′) может быть записана в виде $f(t)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\left(a_n\cos\dfrac{\pi nt}{l}+b_n\sin\dfrac{\pi nt}{l}\right)$ или, с учетом формул (3.2),

$$f(t)=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-l}^{l}f(\tau)\left(\cos\frac{\pi nt}{l}\cdot\cos\frac{\pi n\tau}{l}+\sin\frac{\pi nt}{l}\cdot\sin\frac{\pi n\tau}{l}\right)d\tau,$$

откуда $$f(t)=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-l}^{l}f(\tau)\cos\frac{\pi n(t-\tau)}{l}d\tau$$

Если ввести обозначения:

$$\omega_n=\frac{\pi n}{l},\ \vartriangle\omega_n=\frac{\pi n}{l}-\frac{\pi(n-1)}{l}=\frac{\pi}{l}\ \text{ и }\ F(\omega_n)=\int_{-l}^{l}f(\tau)\cos\left[\omega_n(t-\tau)\right]d\tau,$$

то последняя формула будет иметь вид: $$f(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(\omega_n)\vartriangle\omega_n. \tag{3.3}$$

Пусть функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на промежутке $(-\infty,+\infty)$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt=Q \qquad (Q - \text{конечное число}),$$

Можно доказать, что при $l\to+\infty$ равенство (3.3) перейдёт в равенство:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)d\omega,\ \text{или}\quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\left[\omega(t-\tau)\right]d\tau. \tag{3.4}$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства (3.4), называется ***интегралом Фурье***.

Замечая, далее, что $\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\left[\omega(t-\tau)\right]d\tau=0$

Пользуясь нечетностью функции $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\left[\omega(t-\tau)\right]d\tau$ по аргументу ω, преобразуем формулу (3.4): $f(t)+0i=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\left\{\cos\left[\omega(t-\tau)\right]+i\sin\left[\omega(t-\tau)\right]\right\}d\tau$, откуда

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{\omega(t-\tau)i}d\tau\,. \qquad (3.5)$$

Последний интеграл называется ***интегралом Фурье в комплексной форме.***

3.2 Преобразование Лапласа и формула обращения

Докажем теперь, что если функция $f(t)$ не интегрируема абсолютно но удовлетворяет условиям:

$$\left.\begin{matrix}\left|f(t)\right|<Me^{c_0t} \quad \text{при } t>0\\ f(t)=0 \quad \text{при } t<0\end{matrix}\right\}, \qquad (3.6)$$

где M и c_0 - некоторые постоянные положительные числа, то при условии

$$c\ge c_1>c_0 \qquad (3.6а)$$

функция $\varphi(t)=e^{-ct}\cdot f(t)$ представляется интегралом Фурье:

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{0}^{+\infty}\varphi(\tau)e^{\omega(t-\tau)i}d\tau\,. \qquad (3.6в)$$

В самом деле, если условия (3.6) и (3.6а) выполняются, то

$$\int_0^{+\infty}\left|\varphi(t)\right|dt=\int_0^{+\infty}\left|e^{-ct}f(t)\right|dt=\int_0^{+\infty}e^{-ct}\left|f(t)\right|dt<\int_0^{+\infty}e^{-ct}\cdot Me^{c_0t}dt=$$

$$=M\int_0^{+\infty}e^{-(c-c_0)t}dt=\frac{M}{-(c-c_0)}e^{-(c-c_0)t}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{M}{c-c_0}<\frac{M}{c_1-c_0}.$$

Т.е., в интервале $(0,+\infty)$ функция $\varphi(t)$ оказывается абсолютно интегрируемой, что и доказывает возможность представления ее в этом интервале интегралом Фурье (3.6в).

Заменяя $\varphi(t)$ в равенстве (3.6в) на $e^{-ct}f(t)$:

$e^{-ct}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_0^{\infty}f(\tau)e^{-c\tau}\cdot e^{\omega(t-\tau)i}d\tau$ и умножая обе части этого равенства на e^{ct},

получаем: $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\ e^{(c+\omega i)t}\int_0^{\infty}f(\tau)e^{-(c+i\omega)\tau}d\tau$. Сделаем замену внешней переменной: $p=c+\omega\cdot \boldsymbol{i}$; $dp=\boldsymbol{i}d\omega$; $\omega=-\infty, p=c-\boldsymbol{i}\infty$; $\omega=\infty, p=c+\boldsymbol{i}\infty$ $p=c-i\infty$. Последняя формула для $f(t)$ примет вид:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{(c+\omega i)t}dp\int_0^{\infty}e^{-p\tau}f(\tau)d\tau\,,$$

это преобразованный интеграл Фурье.

Если положить:

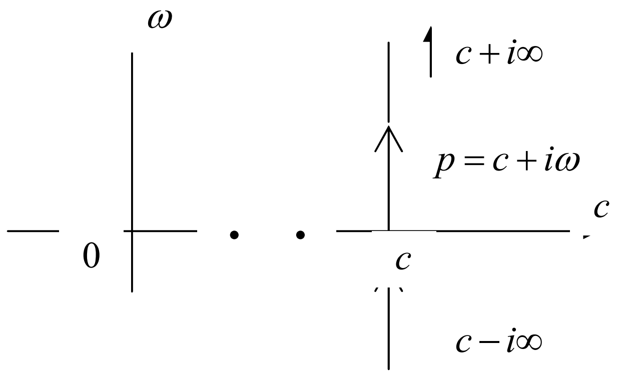
$$F(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}f(t)dt\,, \qquad (3.7)$$

то

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{pt}F(p)dp\,. \qquad (3.8)$$

Формула (3.7), в правой части которой стоит так называемый ***интеграл Лапласа***, определяет ***преобразование Лапласа,*** при помощи которого функция $f(t)$ вещественного независимого переменного t преобразуется в функцию $F(p)$ комплексного независимого переменного p. Формула (3.8), позволяющая делать обратное преобразование, называется ***формулой Меллина***.

Легко доказать, что, если функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле и условиям (п.3.6), то изображение $F(p)$ представляет собой функцию, регулярную при всех значениях комплексного независимого переменного $p = c + \omega t$, удовлетворяющих неравенствам (3.6а), то есть регулярную по всей полуплоскости, расположенной справа от прямой $\operatorname{Re} p = c_0$.



Формула (3.8), в правой части которой стоит так называемый ***интеграл обращения***, определяет преобразование обратное преобразованию Лапласа, то есть преобразование, при помощи которого функция $F(p)$ комплексного переменного p преобразуется в функцию $f(t)$ вещественного независимого переменного t.

3.3 Основные определения операционного исчисления

Исходной формулой операционного исчисления является формула (3.7) :

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt,$$

определяющая преобразование Лапласа. Обычно, эту формулу, связывающую функцию $F(p)$ с функцией $f(t)$, заменяют символической записью $F(p) \risingdotseq f(t)$.

Определение. Функцию $f(t)$ называют ***начальной функцией или оригиналом***, а функция $F(p)$, получаемую из $f(t)$ при помощи преобразования Лапласа, называется ***изображением*** функции $f(t)$.

Изображения имеют только те функции, для которых имеет смысл интеграл Лапласа (1.9).

Примером функции, не имеющей изображения, может служить функция $f(t) = \dfrac{1}{t}$. Точно так же не всякая функция комплексного переменного может рассматриваться как изображение некоторой функции вещественного переменного. Например, не имеет оригинала функция $F(p) = \operatorname{tg} p$, так как полюсы этой функции распределяются по всей вещественной оси. То есть на комплексной плоскости (p) нет ни одной прямой, параллельной мнимой оси, справа от которой эта функция была бы регулярной.

Мы будем рассматривать только такие начальные функции $f(t)$, которые удовлетворяют трем условиям:

1) $f(t) = 0$ при $t < 0$,

2) $|f(t)| < Me^{c_0 t}$ при $t > 0$, где M и c_0 - некоторые положительные постоянные числа,

3) На любом конечном отрезке $[0, T]$ $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле (п.3.1).

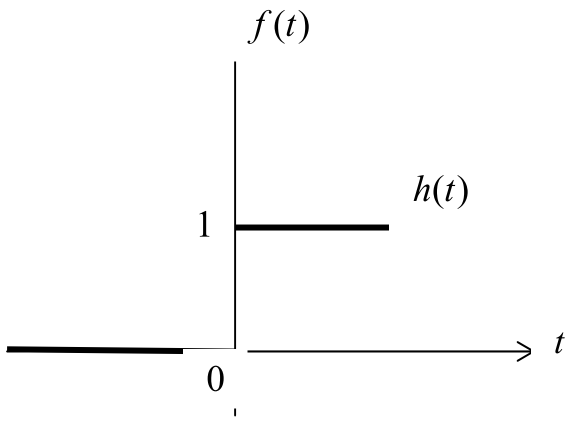
Кроме того, всегда будем считать, что в формуле (1.9) $\operatorname{Re} p = C_0 \geq c_1 > c_0$;

При этих условиях интеграл Лапласа, определяющий функцию $F(p)$, *равномерно сходиться во всей полуплоскости, ограниченной прямой* $\operatorname{Re} p = C_0$. Функции $f(t)$, удовлетворяющие всем этим условиям, будем называть ***изображаемыми по Лапласу***.

Приведём два примера непосредственного вычисления изображений для функций, играющих очень важную роль в операционном исчислении.

1. Функция, равная нулю при $t<0$ и равная единице при $t>0$; эта функция называется ***единичной функцией*** и обозначается $h(t)$:

$$h(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t<0\\ 1 \text{ при } t>0\end{cases}.$$



Изображение $H(p)$ единичной функции $h(t)$ легко определяется по формуле (2.1):

$$H(p)=\int_0^\infty e^{-pt}h(t)dt=\int_0^\infty e^{-pt}dt=\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^\infty=\frac{1}{p},$$

Следовательно, $H(p)=\dfrac{1}{p}$ при $\operatorname{Re} p>0$, то есть : $h(t) \fallingdotseq \dfrac{1}{p}$.

2. Экспоненциальная функция, равная нулю при $t<0$ и равная $e^{\alpha t}$ при $t>0$:

$$e(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t<0\\ e^{\alpha t} \text{ при } t>0\end{cases}$$. В дальнейшем будем писать просто $e^{\alpha t}$.

$$E(p)=\int_0^\infty e^{-pt}e^{\alpha t}dt=\int_0^\infty e^{(\alpha-p)t}dt=\left[\frac{1}{\alpha-p}e^{(\alpha-p)t}\right]_0^\infty=\frac{1}{p-\alpha};\ \operatorname{Re} p>\operatorname{Re}\alpha.$$

Отсюда $e^{\alpha t} \fallingdotseq \dfrac{1}{p-\alpha}$; $\operatorname{Re} p>\operatorname{Re}\alpha.$

3.4 Основные свойства изображений и оригиналов.

3.4.1 Линейность.

1) Умножение начальной функции (оригинала) на постоянную величину влечет за собой умножение на ту же постоянную изображения:

Пусть $F(p) \fallingdotseq f(t)$. В этом случае $c\cdot f(t) \fallingdotseq c\cdot F(p)$,

Например, $f(t)=2 \fallingdotseq F(p)=\dfrac{2}{p}$, т.к. $f(t)=2h(t)$.

2) Изображение алгебраической суммы конечного числа начальных функций равно алгебраической сумме изображений этих функций:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(t) \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} F_k(p), \text{ где } f_k(t) \fallingdotseq F_k(p), \ (k=1,2,...,n).$$

Два рассмотренных свойства называются линейными и легко объединяются: *Изображение линейной комбинации оригиналов равно той же линейной комбинации соответствующих изображений*:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t) \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p), \text{ где } f_k(t) \fallingdotseq F_k(p) \text{ и } c_k = const, \ (k=1,2,...,n).$$

Доказательство этих свойств основано на применении простейших теорем об определенном интеграле.

Пример. $\operatorname{ch}\alpha t = \dfrac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} \fallingdotseq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-\alpha}+\dfrac{1}{p+\alpha}\right) = \dfrac{p}{p^2-\alpha^2}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha.$

Отсюда сразу получаем: $\cos\omega t = \operatorname{ch}(\boldsymbol{i}\omega t) \fallingdotseq \dfrac{p}{p^2-(\boldsymbol{i}\omega)^2} = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Im}\omega.$

Замечание. При использовании операционного исчисления обычно обращаются к каталогам, содержащим некоторое число оригиналов и их изображений, определенных заранее (вывод некоторых из них будет дан ниже). Ясно, что такие каталоги могут быть использованы и для практического решения обратной задачи, состоящей в определении начальной функции по данному изображению этой функции.

3.4.2 Дифференцирование и интегрирование оригинала и изображения

В дальнейшем при формулировке и доказательстве теорем операционного исчисления мы всегда будем считать, что все рассматриваемые начальные функции:

1) *изображаемы по Лапласу*;
2) *дифференцируемы необходимое количество раз*;
3) *все производные изображаемы по Лапласу*.

Оригинал будем обозначать малыми буквами, а изображения – соответствующими большими буквами (например, $f(t) \fallingdotseq F(p)$, $\varphi(t) \fallingdotseq \Phi(p)$ и т.д.).

Дифференцирование оригинала

Допустим, что оригинал $f(t)$ − дифференцируемая функция и его производная $f'(t)$ также является оригиналом, причем $|f(t)| < Me^{c_0 t}, |f'(t)| < M_1 e^{c'_0 t}$ при $t > 0$.

Пусть $f(t) \fallingdotseq F(p)$, $f'(t) \fallingdotseq F_1(p)$. Найдем связь между $F(p)$ и $F_1(p)$. По определению изображения имеем: $F_1(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)dt$.

Выберем здесь p так, чтобы одновременно выполнялись неравенства $\operatorname{Re}(p) > c_0$, $\operatorname{Re}(p) > c'_0$. Выполняя в правой части интегрирование по частям, причем $u = e^{-pt}$, $dv = f'(t)dt$ $(v = f(t))$, находим

$$F_1(p) = f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + p\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = -f(0) + \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = -f(0) + pF(p).$$

Таким образом, из соотношения $f(t) \fallingdotseq F(p)$ следует:

$$f'(t) \fallingdotseq pF(p) - f(0) \qquad (2.2)$$

Предполагая, что оригинал $f(t)$ дифференцируем n раз и что $f^{(n)}(t)$ также является оригиналом, методом индукции из формулы (2.2) получим следующий результат:

Из соотношения $f(t) \risingdotseq F(p)$ следует соотношение

$$f^{(n)}(p) \risingdotseq p^n F(p) - \left\{p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \ldots + f^{(n-1)}(0)\right\}. \qquad (2.3)$$

Пример. Изображение функции $f(t) = \operatorname{sh} \alpha t$ можно получить следующим образом: $\operatorname{sh} \alpha t = \dfrac{1}{\alpha}(\operatorname{ch} \alpha t)' \risingdotseq \dfrac{1}{\alpha}\left(p \dfrac{p}{p^2 - \alpha^2} - 1\right) = \dfrac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$;

Интегрирование оригинала

Примем без доказательства, что если $f(t)$ может служить оригиналом, то оригиналом некоторого изображения будет и функция $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau) d\tau$.

Найдем теперь изображение $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau) d\tau$.

Так как $f(t) = \varphi'(t)$, то полагая $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$, по формуле (2.2) находим связь между $\Phi(p)$ и $F(p)$:

$F(p) = p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p) \quad (\varphi(0) = 0)$,

откуда $\Phi(p) = \dfrac{1}{p} F(p)$. Таким образом, из соотношения $f(t) \risingdotseq F(p)$ следует

$$\int\limits_0^t f(\tau) d\tau \risingdotseq \frac{1}{p} F(p). \qquad (2.4)$$

Примеры. **1**. $f(t) = h(t) \risingdotseq F(p) = \dfrac{1}{p}$, следовательно – $t = \int\limits_0^t d\tau \risingdotseq \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{1}{p^2}$.

По индукции легко получить: $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$, $n \in \mathrm{N}$, $\operatorname{Re} p > 0$.

$$\mathbf{2}.\ \sin \omega t = \omega \int\limits_0^t \cos \omega t\, dt \risingdotseq \frac{\omega}{p} \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \omega.$$

Дифференцирование изображения

В теории функций комплексного переменного доказывается, что несобственный интеграл $\varphi(z) = \int\limits_a^{+\infty} f(z,t) dt$, в котором $f(z,t)$ есть регулярная функция комплексного переменного z в замкнутой области D и непрерывная функция вещественного переменного t при $t > a$, можно дифференцировать под знаком интеграла: $\varphi'(z) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f(z,t)}{\partial z} dt$, если интеграл этот сходится равномерно относительно z. При этом теорема остается верной и для несобственного интеграла, в котором подынтегральная функция $f(z,t)$ становится неограниченной.

Говоря о свойствах изображения, было установлено, что изображение является регулярной функцией комплексного переменного p в полуплоскости $\mathrm{Re} > c > c_1 > c_0$ и что в этой полуплоскости дифференцирование изображения можно выполнять под знаком интеграла Лапласа. Поэтому из равенства $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$ следует, что

$\frac{d^n F(p)}{dp^n} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} t^n (-t)^n f(t)\,dt$. в правой части равенства стоит изображение функции $(-1)^n t^n f(t)$. Таким образом, из соотношения $f(t) \fallingdotseq F(p)$ следует, что

$$(-1)^n t^n f(t) \fallingdotseq \frac{d^n F(p)}{dp^n} \qquad (2.5)$$

Примеры. **1**. $-te^{\alpha t} \fallingdotseq \left(\frac{1}{p-\alpha}\right)' = -\frac{1}{(p-\alpha)^2} \Rightarrow te^{\alpha t} \fallingdotseq \frac{1}{(p-\alpha)^2}, \mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\,\alpha$.

$$\mathbf{2}.\ -t\sin\omega t \fallingdotseq \left(\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\right)' = -\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2} \Rightarrow t\sin\alpha t \fallingdotseq \frac{2\alpha t}{(p^2+\alpha^2)^2}, \mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\,\alpha$$

Интегрирование изображения

Пусть функция $\frac{f(t)}{t}$ является изображаемой по Лапласу, т.е. имеет место соотношение:

$$\frac{f(t)}{t} \fallingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Заменим функцию $\frac{e^{-pt}}{t}$ интегралом $\int_p^\infty e^{-qt} dq$: $\frac{f(t)}{t} \fallingdotseq \int\limits_0^{+\infty} \left\{ f(t) \int_p^\infty e^{-qt} dq \right\} dt$

и изменим в правой части порядок интегрирования:

$$\frac{f(t)}{t} \fallingdotseq \int_p^\infty \left\{ \int\limits_0^{+\infty} e^{-qt} f(t)\,dt \right\} dq = \int_p^\infty F(q)dq,$$

где $F(q) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-qt} f(t)\,dt \risingdotseq f(t)$.

Таким образом, если $F(p) \risingdotseq f(t)$ и функция $\frac{f(t)}{t}$ изображаема по Лапласу, то

$$\int_p^{\infty} F(q)dq \quad \fallingdotseq \quad \frac{f(t)}{t}. \tag{2.6}$$

Пример. $\dfrac{\sin\omega t}{t} \fallingdotseq \omega\int_p^{\infty}\dfrac{dq}{q^2+\omega^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{p}{\omega}\Big|_p^{\infty} = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{p}{\omega}.$

3.5 Основные теоремы операционного исчисления

3.5.1 Теорема подобия

Пусть $f(t) \fallingdotseq F(p)$ и $a = const > 0$. В этом случае

$$f(at) \fallingdotseq \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right). \tag{3.1.}$$

Доказательство. $f(at) \fallingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(at)\,dt$. Сделаем замену: $at = \tau \Rightarrow dt = \dfrac{d\tau}{a}$

тогда $f(at) \fallingdotseq \dfrac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}\tau} f(\tau)d\tau$, или $f(at) \fallingdotseq \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{p}{a}\right)$.

Из формулы (3.1) следует, что *увеличению независимой переменной оригинала в* a *раз, соответствует уменьшение в* a *раз как независимой переменной изображения, так и самого изображения*.

3.5.2 Теорема запаздывания

Определение. Функция, $f(t-\tau)$, где $\boldsymbol{\tau} > 0$ некоторая постоянная величина, называется ***функцией запаздывающего аргумента*** (относительно функции $f(t)$, (рис.3.1)).
Обозначим функцию $f(t-\tau)$ через $f_\tau(t)$: $f_\tau(t) = f(t-\tau)$. (Если t − время, то функция $f_\tau(t)$ описывает процесс с запаздыванием на время $\boldsymbol{\tau}$)

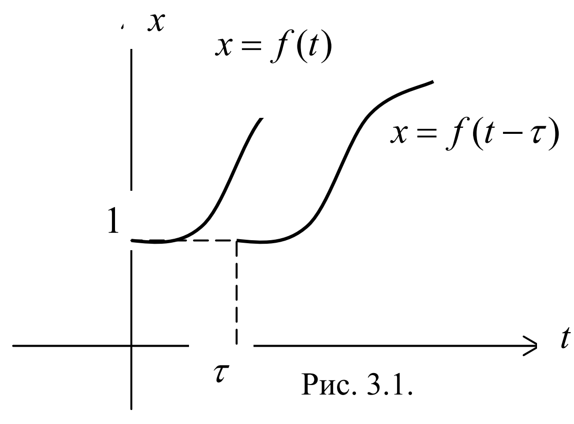


Рис. 3.1.

Зная изображение $F(p)$ функции $f(t)$, можно найти изображение $F_\tau(p)$ функции $f_\tau(t) = f(t-\tau)$, пользуясь формулой $f(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$.

Так как $f(t-\tau) = 0$ при $t < \tau$, имеем:

$$F_\tau(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-\tau)dt = \int_\tau^{+\infty} e^{-pt}\cdot f(t-\tau)dt.$$

Применяя подстановку $t-\tau=t_1$, $dt=dt_1$, (при $t=\tau$, $t_1=0$ и $t=\infty$, $t_1=\infty$), имеем

$$F_\tau(p)=\int_0^{+\infty}e^{-p(t_1+\tau)}f(t_1)dt_1=e^{-p\tau}\int_0^{+\infty}e^{-pt_1}f(t_1)dt_1=e^{-p\tau}\cdot F(p).$$

Таким образом: $F_\tau(p)=e^{-p\tau}\cdot F(p)$, то есть $e^{-pt}\cdot F(p)\risingdotseq f(t-\tau)$

3.5.3 Теорема смещения

Если функция $f(t)$ является оригиналом, то при любом вещественном или комплексном α оригиналом будет являться и функция $e^{\alpha t}f(t)$, так как из оценки

$\left|f(t)\right|<Me^{c_0t}$ вытекает $\left|e^{\alpha t}f(t)\right|<Me^{[c_0+\mathrm{Re}(\alpha)]t}$ при $t>0$.

Найдем изображение этой функции

$$e^{\alpha t}f(t)\fallingdotseq\int_0^{+\infty}e^{-pt}e^{\alpha t}f(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-(p-\alpha)t}f(t)dt.$$

Интеграл в правой части последнего равенства отличается от интеграла Лапласа, определяющего изображения $F(p)\risingdotseq f(t)$ лишь тем, что в последнем аргумент изображения p заменен на $(p-\alpha)$.

Таким образом, если $f(t)\fallingdotseq F(p)$, то $e^{\alpha t}\cdot f(t)\fallingdotseq F(p-\alpha)$.

Пример. $\cos\omega t\fallingdotseq\dfrac{p}{p^2+\omega^2}\Rightarrow e^{\alpha t}\cos\omega t\fallingdotseq\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$

3.5.4 Изображения основных элементарных функций

Приведём таблицу изображений основных элементарных функций, которые были получены в предыдущих разделах в качестве примеров, либо их обобщений. Напомним, что все функции удовлетворяют условиям, сформулированным в пункте 2.1.

$$1\fallingdotseq\frac{1}{p},\quad t\fallingdotseq\frac{1}{p^2},\quad t^2\fallingdotseq\frac{2}{p^3},\quad t^n\fallingdotseq\frac{n!}{p^{n+1}}\quad,\ \mathrm{Re}\,p>0$$

$$e^{\alpha t}\fallingdotseq\frac{1}{p-\alpha};\qquad t^ne^{\alpha t}\fallingdotseq\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}\quad;\mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,\alpha.$$

$$\sin\omega t\fallingdotseq\frac{\omega}{p^2+\omega^2};\mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,\omega.\qquad\cos\omega t\fallingdotseq\frac{p}{p^2+\omega^2};\mathrm{Re}\,p>\mathrm{Im}\,\omega.$$

$$\mathrm{sh}\,\alpha t=\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}\fallingdotseq\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2};\qquad\mathrm{ch}\,\alpha t=\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}\fallingdotseq\frac{p}{p^2-\alpha^2};\mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,\alpha.$$

$$e^{\alpha t}\cos\omega t\fallingdotseq\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2},\qquad e^{\alpha t}\sin\omega t\fallingdotseq\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2},$$

$$e^{\alpha t}\operatorname{ch}\beta t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\beta^2}, \qquad e^{\alpha t}\operatorname{sh}\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$$

$$t\sin\omega t \risingdotseq \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}; \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\omega. \qquad t\cos\omega t \risingdotseq \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}; \operatorname{Re} p > \operatorname{Im}\omega.$$

$$\frac{\sin\omega t}{t} \risingdotseq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{p}{\omega}$$

Приведём ещё несколько свойств оригиналов и изображений, используемых как для определения изображений, так и для восстановления оригиналов.

3.5.5. Теорема свертывания

Определение. ***Сверткой*** двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция $f(t)$, определяемая формулой $f(t) = \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$.

(Операцию получения свертки часто называют свертыванием двух функций).

Если в интеграле заменить $t-\tau=\theta; d\tau=-d\theta$, ($\tau=0$, $\theta=t$; $\tau=t$, $\theta=0$) то формула примет вид: $f(t) = -\int_t^0 f_1(t-\theta)\cdot f_2(\theta)d\theta = \int_0^t f_1(t-\theta)\cdot f_2(\theta)d\theta$

или $f(t) = \int_0^t f_1(t)\cdot f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)d\tau$,

т.е. *функции* $f_1(t)$ и $f_2(t)$, *входящие в свертку, равноправны*.

Поставим теперь задачу выразить изображение $F(p)$ свертки $f(t)$ через изображения $F_1(p)$ и $F_2(p)$ свертываемых функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Теорема. *Изображение свертки двух функций равно произведению их изображений.*

Если $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, а $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, то $F_1(p)\cdot F_2(p) \risingdotseq \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$, или $f(t) \risingdotseq F(p) = F_1(p)\cdot F_2(p)$.

Доказательство. Определим изображение функции $f(t)$:

$$F(p) = \int_0^{+\infty}\left[e^{-pt}\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau\right]dt,$$

Причем областью интегрирования является часть первого координатного угла, ограниченная прямыми $\tau=0$ и $\tau=1$ (рис. 4.1).

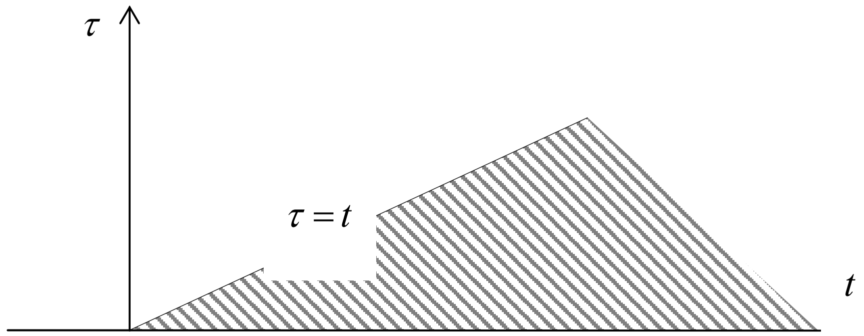


Рис. 4.1.

Изменим порядок интегрирования в полученном интеграле.

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f_1(\tau)\cdot\left[\int_\tau^{+\infty} f_2(t-\tau)e^{-pt}dt\right]d\tau=$$

$$=\int_0^{+\infty} f_1(\tau)\cdot\left[\int_\tau^{+\infty} f_2(t-\tau)e^{-p(t-\tau)}d(t-\tau)\right]e^{-p\tau}d\tau=$$

$$=\int_0^{+\infty} f_1(\tau)\cdot e^{-p\tau}d\tau\cdot\left[\int_\tau^{+\infty} f_2\underbrace{(t-\tau)}_{\theta}e^{-p(t-\tau)}d(t-\tau)\right]=$$

$$=\int_0^{+\infty} f_1(\tau)\cdot e^{-p\tau}d\tau\cdot\int_0^{+\infty} e^{-p\theta}f_2(\theta)d\theta=$$

$$=F_1(p)\cdot F_2(p),$$

(т.к. $F_1(p)=\int_0^{+\infty} f_1(\tau)\cdot e^{-p\tau}d\tau$ и $F_2(p)=\int_0^{+\infty} e^{-p\theta}f_2(\theta)d\theta=\int_0^{+\infty} e^{-pt}f_2(t)dt$.)

Таким образом, $F(p)=F_1(p)\cdot F_2(p)$ или

$$f(t)=\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau\fallingdotseq F_1(p)\cdot F_2(p)=F(p)$$

Пример. Найти оригинал $f(t)$, зная его изображение: $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$.

Решение. Обозначим: $f_1(t)=e^t\fallingdotseq\dfrac{1}{p-1}=F_1(p)$ и $f_2(t)=\sin t\fallingdotseq\dfrac{1}{p^2+1}=F_2(p)$,

По теореме умножения функций $F_1(p)\cdot F_2(p)\risingdotseq f(t)=\int_0^t f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)d\tau$

.

$$f(t)=\int_0^t e^{t-\tau}\cdot\sin\tau d\tau=-\int_0^t e^{t-\tau}d\cos\tau=\left[-e^{t-\tau}\cos\tau-\int\cos\tau e^{t-\tau}d\tau\right]_0^t=$$

$$=-\cos t+e^t-\int_0^t e^{t-\tau}d\sin\tau=-\cos t+e^t-\left[e^{t-\tau}\sin\tau\Big|_0^t+\int_0^t\sin\tau e^{t-\tau}d\tau\right]=$$

$$=-\cos t+e^t-0-\int_0^t e^{t-\tau}\sin\tau d\tau.$$

Итак: $f(t)=\int_0^t e^{t-\tau}\cdot\sin\tau d\tau=\dfrac{1}{2}\left(e^t-\cos t\right)$, т.е.

$$f(t)=\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}\cos t\fallingdotseq F(p)=\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}.$$

Проверим:

$\dfrac{1}{2}\left(e^t-\cos t\right)\fallingdotseq F(p)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(p-1)}-\dfrac{p}{(p^2+1)}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p^2+1-p^2+1}{(p-1)(p^2+1)}\right)=\dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$, что и требовалось доказать.

3.6 Теоремы разложения

Теоремы разложения применяются для нахождения оригинала $f(t)$, когда известно изображение $F(p)$. Каждая из этих теорем справедлива лишь при определенных частных условиях, накладываемых на изображение $F(p)$. Однако классы функций, удовлетворяющих этим условиям, являются весьма широкими; вычисления же, связанные с применением теорем разложения, настолько просты, что использование этих теорем при решении многих конкретных задач оказывается весьма эффективным.

3.6.1. Первая теорема разложения

Предположим, что данное изображение $F(p)$ может быть разложено в ряд по степеням $\frac{1}{p}$:

$$F(p)=\frac{a_0}{p}+\frac{a_1}{p^2}+...+\frac{a_n}{p^{n+1}}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{n+1}}, \qquad (5.1)$$

сходящийся при $|p|>R$.

Если к каждому отдельному члену этого ряда применить операционное соотношение:

$\frac{a_n}{p^{n+1}} \risingdotseq a_n\frac{t^n}{n!}\ \ (n=0,1,2,...)$,

то оригинал $f(t)$ определяется формулой:

$$f(t)=a_0+a_1\frac{t}{1!}+a_2\frac{t^2}{2!}+a_3\frac{t^3}{3!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{t^n}{n!}. \qquad (5.2)$$

Пример. $F(p)=\frac{1}{p}arctg\frac{1}{p}$ разлагается в ряд:

$$F(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{3p^4}+\frac{1}{5p^6}-...+\frac{(-1)^n}{(2n-1)p^{2n}}+...$$

По первой теореме разложения

$$f(t)=t-\frac{t^3}{3\cdot 3!}+\frac{t^5}{5\cdot 5!}-\frac{t^7}{7\cdot 7!}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(2n-1)!}+...=\int_0^t\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau.$$

3.6.2. Вторая теорема разложения

Для того, чтобы найти оригинал функции $f(p)$, изображение $F(p)$ которой заданно дробно-рациональной функцией

$$F(p)=\frac{R(p)}{Q(p)}=\frac{R(p)}{(p-p_1)^{k_1}(p-p_2)^{k_2}...(p-p_m)^{k_m}},$$

(степень числителя меньше степени знаменателя), разлагаем изображение $F(p)$ на элементарные дроби, после чего находим оригинал каждой дроби.

Пример. $F(p)=\frac{p}{(p+1)^2(p^2+2p+2)} \risingdotseq f(t)=?$

$$F(p)=\frac{p}{(p+1)^2(p^2+2p+2)}=\frac{A}{(p+1)^2}+\frac{B}{p+1}+\frac{Cp+D}{p^2+2p+2},$$

$A=-1,\ B=1,\ C=-1,\ D=0$.

Получим: $F(p)=\frac{-1}{(p+1)^2}+\frac{1}{p+1}-\frac{(p+1)-1}{(p+1)^2+1}$.

Запишем оригинал:

$f(t) = -t \cdot e^{-t} + e^{-t} - e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t = (-t + 1 - \cos t + \sin t)e^{-t}$.

3.6.3. Третья теорема разложения

Если изображением $F(p)$ искомой функции $f(p)$ служит функция комплексного аргумента, регулярная справа от прямой $\mathrm{Re}\, p = \sigma_0$, а на этой прямой и слева от нее не имеющая других особенностей, кроме конечного множества полюсов и существенно особых точек, то оригиналом для этой функции служит функция $f(t)$, определяемая по формуле

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k} \left\{ e^{pt} F(p) \right\}. \qquad (5.3)$$

Пример. $F(p) = \dfrac{p^2}{(p-1)^2(p^2+1)} \risingdotseq f(t) = ?$

$p = 1$ - полюс 2-го порядка, $p = \pm i$ - полюсы 1-го порядка.

$$\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left\{e^{pt}F(p)\right\} = \lim_{p\to 1}\left\{e^{pt}\cdot F(p)\cdot(p-1)^2\right\}' = \lim_{p\to 1}\left\{e^{pt}\cdot\frac{p^2}{(p^2+1)}\right\}' = \frac{t+1}{2}\cdot e^t.$$

$$\operatorname*{Res}_{p=i}\left[e^{pt}F(p)\right] = \lim_{p\to i}\left[\frac{e^{pt}\cdot p^2}{(p-1)^2(p+i)}\right] = -\frac{1}{4}\cdot e^{it}.$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-i}\left[e^{pt}F(p)\right] = \lim_{p\to -i}\left[\frac{e^{pt}\cdot p^2}{(p-1)^2(p-i)}\right] = -\frac{1}{4}\cdot e^{-it}.$$

$$f(t) = \frac{t+1}{2}e^t - \frac{1}{4}\left(e^{it} + e^{-ti}\right) = \frac{t+1}{2}e^t - \frac{1}{2}\cos t.$$

3.7 Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методами операционного исчисления

Пусть требуется проинтегрировать уравнение

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t)$$

при начальных условиях:

$t = 0:\ x = x_0,\ x' = x_0',\ldots, x^{(n-1)} = x_0^{(n-1)}$,

$x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}$ - заданные постоянные, а $f(t)$ - заданная функция, изображаемая по Лапласу.

Обозначим изображение искомого решения через $X(p)$: $f(t) \risingdotseq X(p)$.

По теореме дифференцирования оригинала (3.4.2), в силу заданных начальных условий имеем:

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x_0$$

$$x''(t) \risingdotseq p^2 X(p) - px_0 - x_0'$$

$$x^{(n)}(t) \risingdotseq p^n X(p) - p^{n-1}x_0 - p^{n-2}x_0' - \ldots - x_0^{(n-1)}.$$

Пусть, далее, $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Подставляя в исходное уравнение вместо функций их изображения, получаем так называемое ***изображающее уравнение***:

$$\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right)X(p) - Y(p) = F(p)$$

(здесь $Y(p) = p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + \ldots + x^{(n-1)} + a_1(p^{n-2}x_0 + \ldots x_0^{(n-2)}) + \ldots + a_{n-1}x_0)$),

т.е. – алгебраическим относительно изображения искомого решения

$$X(p)=\frac{F(p)+Y(p)}{p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n}.$$

Для отыскания решения остается по полученному изображению найти его оригинал, пользуясь известными теоремами.

Рассмотрим несколько примеров решения задачи Коши методами операционного исчисления.

1. $x'''(t)+4x'(t)=1,\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0$

$$x(t)\risingdotseq X(p)$$

$$x'(t)\risingdotseq pX(p)-0$$

$$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-p\cdot 0-0$$

$$x'''(t)\risingdotseq p^3X(p)-p^2\cdot 0-p\cdot 0-0;\quad 1\risingdotseq \frac{1}{p}.$$

$$p^3X(p)+4pX(p)=\frac{1}{p},\ X(p)\left[p^3+4p\right]=\frac{1}{p},$$

$$X(p)=\frac{1}{p^2(p+4)}=\frac{1}{4p^2}-\frac{1}{4(p^2+4)}.$$

$$\frac{1}{4p^2}\risingdotseq\frac{1}{4}t,\ \frac{1}{4(p^2+4)}\risingdotseq\frac{1}{8}\sin 2t\ \Rightarrow x(t)=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\sin 2t$$

2. $x''(t)-4x'(t)+5x(t)=0,\ x(0)=0,\ x'(0)=1.$

$$p^2X(p)-1-4pX(p)+5X(p)=0.$$

.
$$X(p)=\frac{1}{p^2-4p+5}=\frac{1}{(p-2)^2+1}.$$

$$x(t)=e^{-2t}\cdot\sin t.$$

3. $x''(t)+4x(t)=2\sin 2t,\ x(0)=-1,\ x'(0)=0.$

Зная: $2\sin 2t\risingdotseq\dfrac{4}{p^2+4}$ и $x(t)\risingdotseq X(p)$, получим

$p^2X(p)+p+4X(p)=\dfrac{4}{p^2+4}$. Отсюда $X(p)=\dfrac{4}{(p^2+4)^2}-\dfrac{p}{p^2+4}$.

Оригиналы для изображений $\dfrac{p}{p^2+4}$ и $\dfrac{4}{p^2+4}$ известны, а именно:

$\dfrac{p}{p^2+4}\risingdotseq\cos 2t$, $\dfrac{4}{p^2+4}\risingdotseq 2\sin 2t$. Оригинал $\dfrac{4}{(p^2+4)^2}$ найдем по теореме свертывания: $\dfrac{4}{(p^2+4)^2}=\dfrac{2}{p^2+4}\cdot\dfrac{2}{p^2+4}\risingdotseq\int_0^t\sin 2\tau\sin 2(t-\tau)d\tau=$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\cos(4\tau-2t)-\cos 2t\right]d\tau=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin(4\tau-2t)-\tau\cos 2t\right]_0^t=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 2t-t\cos 2t-\frac{1}{4}\sin(-2t)\right]=\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{2}t\cos 2t.$$

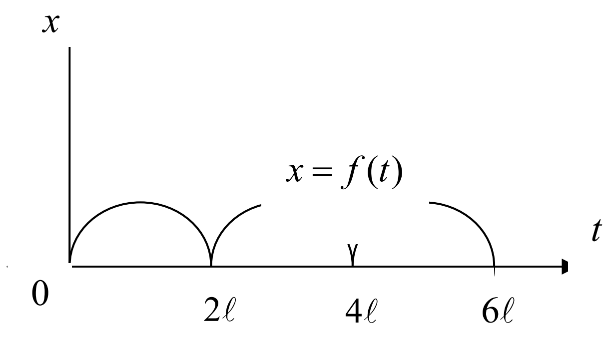
Окончательно:

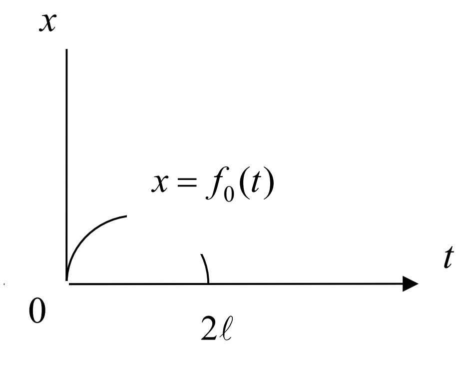
$$x(t)=-\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{2}t\cos 2t=\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{t+2}{2}\cos 2t$$

3.8 Изображение периодической функции

В заключение, приведём ещё один пример построения изображения.

Пусть требуется найти изображение периодической функции $f(t)$ с периодом $T = 2\ell$ (при $t > 0$ $f(t + 2\ell) = f(t)$). (При $t < 0$ $f(t) = 0$ (3.3)).





Введем вспомогательную функцию $f_0(t)$, которая на полуотрезке $[0, 2\ell)$ равна $f(t)$, вне этого отрезка равна 0, т.е.

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \le t < 2\ell \\ 0, & t \notin (0, 2\ell] \end{cases}.$$

Ее изображением будет служить функция $F_0(p)$, определяемая следующим образом:

$$f_0(t) \risingdotseq F_0(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f_0(t)dt = \int_0^{2\ell} e^{-pt} f_0(t)dt,$$

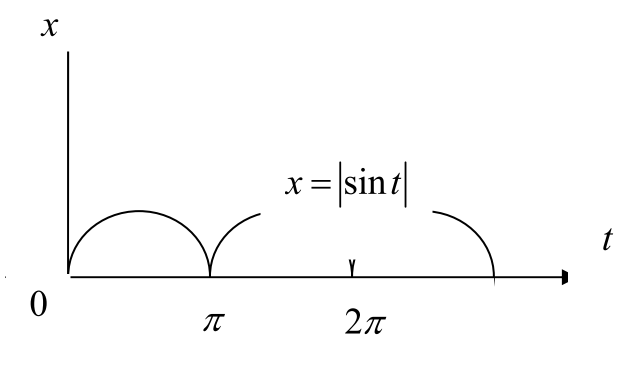
.

Функцию $f(t)$, в свою очередь, можно выразить через $f_0(t)$ следующим образом: $f(t) = h(\ell) f_0(t) + h(t - 2\ell) f(t - 2\ell)$, здесь $f(t - 2\ell)$ - та же периодическая функция, но с запаздыванием на один период, равная нулю при $t < 2\ell$. Переходя в последнем равенстве к изображениям и используя теорему запаздывания (3.5.2), получаем: $F(p) = F_0(p) + e^{-2\ell p} F(p)$, откуда: $F(p) = \dfrac{F_0(p)}{1 - e^{-2\ell p}}$.

Таким образом, изображение периодической функции $f(t)$ с периодом $T = 2\ell$ определяется следующими формулами:

$$f(t) \risingdotseq F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-2\ell p}}, \qquad \text{где} \qquad F_0(p) = \int_0^{2\ell} e^{-pt} f(t)dt.$$

Пример. В качестве примера найдем изображение функции $|\sin t|$.



$$|\sin t| \risingdotseq F(p)=\frac{\int\limits_0^{\pi} e^{-pt}|\sin t|dt}{1-e^{-\pi p}}=\underbrace{\frac{1}{1-e^{-\pi p}}}_{a}\left[\int\limits_0^{\pi} e^{-pt} d\cos t\right]=$$

$$=a\left[-e^{-pt}\cos t\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{p}\int\limits_0^{\pi}\cos t\, e^{-pt}dt\right]=a\left[e^{-pt}+1+p\left(\underbrace{e^{-pt}\sin t\Big|_0^{\pi}}_{=0}-p\int\limits_0^{\pi} e^{-pt}\sin t dt\right)\right]_0^{\pi}=$$

$$=a\left[e^{-\pi p}+1\right]-p^2F(p);$$

Отсюда: $$F(p)=\frac{\left(1+e^{-\pi p}\right)}{(1+p^2)(1-e^{-\pi p})}=\frac{\operatorname{cth}\dfrac{\pi p}{2}}{1+p^2}.$$

Вопросы для самопроверки.

1. Для всякого ли оригинала $f(t)$ существует изображение $F(p)$? Сформулировать требования к оригиналу.
2. Как изменится изображение, если аргумент оригинала умножить на $a = 3$?
3. Решить систему дифференциальных уравнений
   $\begin{cases} x' + y = 0 \\ y' - 2x - 2y = 0 \end{cases}$; $x(0) = y(0) = 1$.
4. Найти оригинал изображения $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$, применив третью теорему разложения (пункт 3.6.3).

Л И Т Е Р А Т У Р А

Основная литература

1. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. - М.: Наука, 1966.-331с.
2. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Учебник для вузов (под ред. В.С.Зарубина и А.П. Крищенко). – М.: МГТУ, – 1996. (Серия «Математика в техническом университете», вып. XI).
3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Задача и упражнения. – М.: Наука, 1981. – 215с.
4. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа. Под ред.Ефимова А.В., Демидовича Б.П., т.2. – 2-е изд. - М.: Наука, 1986.-368с.

Дополнительная литература

1. Мышкис А.Д. Математика для втузов. Специальные курсы. – М.: Наука, 1971. – 632с.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 628с.
3. Шостак Р.Я. Операционное исчисление. М.: Высшая школа. – 1972. - 252с.

Методические и учебные пособия

1. Ванько В.И., Галкин С.В., Морозова В.Д. Методические указания для самостоятельной работы студентов по разделам «Теория функций комплексного переменного» и «Операционное исчисление». – М.: МВТУ,1988.-28с.
2. Шостак Р.Я. Учебное пособие по операционному исчислению. – М.: МВТУ, 1967. – 100с.