Московский Государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

факультет фундаментальных наук
кафедра математического моделирования

Н. С. Гусев, В. Л. Чернышев

Производная Ли, теорема Фробениуса, дифференциальные формы

*Учебное пособие по дисциплине
«Управление движением»*

Электронное учебное издание

Москва, 2011

УДК 514.7

Рецензенты:

Иванов Александр Олегович, д.ф.-м.н., механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, профессор кафедры дифференциальной геометрии и приложений;

Хорькова Нина Григорьевна, к.ф.-м.н., факультет фундаментальных наук МГТУ имени Н. Э. Баумана, доцент кафедры прикладной математики (ФН-2)

Авторы: Гусев Никита Сергеевич, Чернышев Всеволод Леонидович

Производная Ли, теорема Фробениуса, дифференциальные формы / Н. С. Гусев, В. Л. Чернышев.— М. : МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2011.— 65 с.

В данном учебном пособии по дифференциальной геометрии и тензорному анализу даны определения и приведен ряд основных свойств производной Ли векторных полей и гладких дифференциальных форм. Доказаны инфинитезимальная формула Стокса и теорема Фробениуса. По каждой из этих тем разобраны примеры и даны задачи для самостоятельной работы.

Предназначается студентам МГТУ имени Н. Э. Баумана, изучающим курс дифференциальной геометрии и тензорного анализа, нелинейные динамические системы с управлением, а также широкому кругу читателей.

Рекомендуется НМС МГТУ имени Н. Э. Баумана в качестве учебного пособия

Содержание

Предисловие

Данное учебное пособие охватывает элементарные понятия теории *дифференциальных форм*; в нем дается определение и алгебраические свойства *производной Ли*, ее связь с дифференцированием форм и внутренним дифференцированием (*инфинитезимальная формула Стокса*); а также определяется понятие векторного распределения и обсуждается *теорема Фробениуса* о критерии вполне интегрируемости в двух видах: с позиции инволютивности локального базиса распределения и с позиции свойств сопряженного с распределением набора дифференциальных форм.

Пособие адресовано студентам МГТУ имени Н. Э. Баумана, углубленно изучающим курс дифференциальной геометрии и тензорного анализа, а также студентам и аспирантам, приступающим к изучению дифференциально-геометрического метода в задачах управления. Этот подход широко применяется в учебных курсах (см., например, программу курса «Управление движением») и научных исследованиях на кафедре «Математического моделирования» под руководством ее заведующего профессора А. П. Крищенко (см., например, книгу [1]).

Углубленное изучение теории дифференциальных форм способствует повышению общематематической культуры будущих инженеров и специалистов по прикладной математике и развитию у них современного взгляда на задачи механики и физики (см., например, известный учебник [2]). Для более глубокого изучения вопросов, связанных с теоремой Фробениуса и инфинитезимальной формулой Стокса, студентам и аспирантам кафедры рекомендуется к прочтению англоязычная монография [3]. Студентам, знакомящимся с дифференциально-геометрическим подходом к задачам управления, рекомендуем обратить внимание на последние главы в книге [4].

Настоящее учебное пособие дополняет имеющиеся учебные материалы по этой тематике, причем особое внимание уделено разбору примеров.

Предполагается, что читатель знаком с аналитической геометрией, алгеброй, математическим анализом, теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказательства базовых свойств соответствующих объектов и операций не приводятся. Читатель легко может найти их в указанных в списке литературы учебниках, монографиях и методических пособиях: [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13]. При этом основные утверждения и теоремы доказаны полностью и с высоким уровнем строгости.

Снабженное предметным указателем и списком используемых обозначений пособие состоит из пяти частей. В первой вводятся понятия гладкого многообразия, тензорного поля на нем, кососимметрического тензорного поля, дифференциала отображения, потока векторного поля, скобки Пуассона. Доказывается формула Картана. Во второй части вводится понятие переноса векторным полем и определяется производная Ли. Доказывается инфинитезимальная формула Стокса. В третьей части обсуждаются распределения и доказывается теорема Фробениуса.

Четвертая и пятая части могут рассматриваться отдельно от остальных, как небольшой задачник с подробными решениями по дифференциальным формам, производной Ли, применению теоремы Фробениуса. Отметим, что в этом данное пособие дополняет известный сборник задач по дифференциальной геометрии [14]. Приведенный в пятом разделе список задач для самостоятельного решения может быть использован для контроля усвоения материала.

Данное учебное пособие подготовлено при частичной финансовой поддержке грантов РНП 2.1.1/227 и МК-943.2010.1.

1. Предварительные сведения и обозначения

§ 1 Тензорные операции

В этом разделе предполагается, что задано линейное вещественное пространство V.

Определение. Для целого числа $\gamma > 0$ инъективное отображение τ из множества $\{1, \ldots, \gamma\}$ в него же называется *перестановкой* на множестве $\{1, \ldots, \gamma\}$.

Определение. Пусть τ — перестановка на множестве $\{1, \ldots, \gamma\}$; тогда ее *знаком* называется число $\operatorname{sign}\tau := (-1)^{\omega}$, где ω — количество *инверсий* в перестановке τ, то есть пар $\langle\alpha, \beta\rangle$ таких, что $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \gamma$ и $\tau(\alpha) > \tau(\beta)$.

Определение. Пусть p — ковариантный тензор на V валентности γ (то есть γ-линейное отображение из $\underbrace{V\times \ldots \times V}_{\gamma \text{ раз}}$ в $\mathbb{R}$), а τ — перестановка на множестве $\{1, \ldots, \gamma\}$; тогда обозначим действие перестановки на тензор:

$$(\tau \hookrightarrow p)\big(v_1, \ldots, v_\gamma\big) := p\left(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(\gamma)}\right), \quad \text{где } v_1, \ldots, v_\gamma \in V.$$

Определение. Ковариантный тензор p валентности γ на V *кососимметричен* (или *антисимметричен*), если

$$\tau \hookrightarrow p = (\operatorname{sign}\tau)\cdot p$$

для всякой перестановки τ на множестве $\{1, \ldots, \gamma\}$.

Определение. Пусть p — ковариантный тензор на V валентности γ; тогда обозначим *альтернацию* тензора p:

$$\operatorname{alt} p := \frac{1}{\gamma!}\cdot\sum_{\tau}(\operatorname{sign}\tau)\cdot(\tau \hookrightarrow p),$$

где сумма распространяется на все перестановки τ на множестве $\{1, \ldots, \gamma\}$.

Утверждение. Пусть p — ковариантный тензор на V; тогда тензор $\operatorname{alt} p$ кососимметричен. Если же сам тензор p кососимметричен, то $\operatorname{alt} p = p$; поэтому $\operatorname{alt}\operatorname{alt} p = \operatorname{alt} p$ для всякого ковариантного тензора p на V.

Определение. Пусть p^1, p^2 — ковариантные тензоры на V валентности γ_1 и γ_2; тогда их *тензорное произведение* есть ковариантный тензор $p^1 \otimes p^2$ на V валентности $\gamma_1 + \gamma_2$, действующий на векторах $v_1, \ldots, v_{\gamma_1+\gamma_2} \in V$ по формуле

$$(p^1 \otimes p^2)\big(v_1, \ldots, v_{\gamma_1+\gamma_2}\big) = p^1\left(v_1, \ldots, v_{\gamma_1}\right)\cdot p^2\left(v_{\gamma_1+1}, \ldots, v_{\gamma_1+\gamma_2}\right).$$

Определение. Пусть p^1, p^2 — ковариантные тензоры на V валентности γ_1 и γ_2; тогда обозначим их *внешнее произведение*: $p^1 \wedge p^2 := \mathrm{alt}\left(p^1 \otimes p^2\right)$.

Утверждение. Операция $\wedge$ ассоциативна и линейна по обоим аргументам.

Определение. Пусть на пространстве V задан ковариантный тензор p валентности $\gamma > 0$; тогда при произвольных векторах $v_1, \ldots, v_\gamma \in V$ обозначим ковариантный тензор $p \overset{\alpha}{\leftarrow} v_\alpha$ на V валентности $(\gamma - 1)$ по формуле

$$(p \overset{\alpha}{\leftarrow} v_\alpha)(\overbrace{v_1, \ldots, v_\gamma}^{\text{без } v_\alpha}) := p\left(v_1, \ldots, v_\gamma\right);$$

а если $1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_\beta \leqslant \gamma$, то это определение индуктивно продолжим:

$$(p \xleftarrow{\alpha_1,\ldots,\alpha_\beta} v_1, \ldots, v_\beta) := (p \xleftarrow{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\beta-1}} v_1, \ldots, v_{\beta-1}) \xleftarrow{\alpha_\beta - \beta + 1} v_\beta .$$

Пример. В пояснение последнего определения положим $\beta = 3$ и поэтапно вычислим:

$$(p \xleftarrow{\alpha_1,\ldots,\alpha_\beta} v_1, \ldots, v_\beta) = (p \xleftarrow{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} v_1, v_2, v_3) =$$
$$= \Big((p \xleftarrow{\alpha_1,\alpha_2} v_1, v_2) \xleftarrow{\alpha_3-3+1} v_3\Big) = \left(\Big((p \overset{\alpha_1}{\leftarrow} v_1) \xleftarrow{\alpha_2-2+1} v_2\Big) \xleftarrow{\alpha_3-3+1} v_3\right);$$

если, например, $\gamma = 6$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 6$, то последовательно («изнутри наружу») будет

$$(p \overset{2}{\leftarrow} v_1) = p\left(\cdot, v_1, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot\right),$$

здесь $(p \overset{2}{\leftarrow} v_1)$ уже пятивалентен,

и его третий аргумент соответствует четвертому в p;

$$\Big((p \overset{2}{\leftarrow} v_1) \xleftarrow{\alpha_2-2+1} v_2\Big) = \Big((p \overset{2}{\leftarrow} v_1) \xleftarrow{4-2+1} v_2\Big) = p\left(\cdot, v_1, \cdot, v_2, \cdot, \cdot\right),$$

здесь валентность стала четыре,

и четвертый аргумент соответствует шестому в p;

$$\left(\Big((p \overset{\alpha_1}{\leftarrow} v_1) \xleftarrow{\alpha_2-2+1} v_2\Big) \xleftarrow{\alpha_3-3+1} v_3\right) = \left(\Big((p \overset{2}{\leftarrow} v_1) \xleftarrow{4-2+1} v_2\Big) \xleftarrow{6-3+1} v_3\right) =$$
$$= p\left(\cdot, v_1, \cdot, v_2, \cdot, v_3\right).$$

Определение. Пусть на пространстве V задан ковариантный тензор p валентности $\gamma \geqslant 0$, и $v_1, \ldots, v_\beta \in V$; тогда обозначим *внутреннюю производную* $(v_1 \otimes \ldots \otimes v_\beta) \lrcorner p$ контравариантным тензором $v_1 \otimes \ldots \otimes v_\beta$ тензора p по формуле

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_\beta) \lrcorner p := \begin{cases} \frac{\gamma!}{(\gamma-\beta)!} \cdot (p \xleftarrow{1,\ldots,\beta} v_\beta, \ldots, v_1), & \text{если } \beta \leqslant \gamma \\ 0, & \text{если } \beta > \gamma; \end{cases}$$

а на все контравариантные тензоры распространим по линейности (то есть если контравариантный тензор есть конечная сумма указанных тензорных произведений, то производная им есть сумма производных его слагаемыми). Здесь $(v_1 \otimes \ldots \otimes v_\beta) \lrcorner\, p$ — ковариантный тензор на V валентности $\max\{0, \gamma - \beta\}$.

Утверждение. Пусть p — ковариантный тензор на V, и v_1, v_2 — контравариантные тензоры на V; тогда

$$v_1 \lrcorner (v_2 \lrcorner\, p) = (v_1 \otimes v_2) \lrcorner\, p\,.$$

Утверждение. Пусть p — кососимметричный ковариантный тензор на V, и v — контравариантный тензор на V; тогда

$$v \lrcorner\, p = (\mathrm{alt}\, v) \lrcorner\, p\,.$$

Утверждение. Пусть p^1, p^2 — кососимметричные ковариантные тензоры на V, причем p^1 имеет валентность γ, и $v \in V$; тогда

$$v \lrcorner (p^1 \wedge p^2) = (v \lrcorner\, p^1) \wedge p^2 + (-1)^{\gamma+1} \cdot p^1 \wedge (v \lrcorner\, p^2).$$

Везде далее применяется тензорное правило Эйнштейна:

если в некоторой формуле есть произведение величин с верхними и нижними индексами, и какой-то переменный индекс встречается в этом произведении только однажды как верхний и как нижний, то в формуле по этому индексу производится суммирование слагаемых вида этого произведения, причем диапазон изменения этого индекса в сумме определяется контекстом формулы.

§ 2 Многообразия

Определение. Пусть задано некоторое множество M; скажем тогда, что инъективное отображение $\mathsf{c} : \mathbb{R}^\mu \longrightarrow M$ — *карта размерности* μ на множестве M. При этом для точки x из образа отображения c вещественные числа $x^{>1}, \ldots, x^{>\mu}$ называются ее *локальными координатами* (относительно карты c), если только $x = \mathsf{c}\,(x^{>1}, \ldots, x^{>\mu})$.

Определение. Пусть заданы две карты c_1, c_2 одной размерности μ на одном множестве; тогда

- они *непрерывно согласованы*, если только отображение $\mathsf{c}_1^{-1} \circ \mathsf{c}_2$ непрерывно, и его образ открыт (здесь c_1^{-1} обозначает обратное к c_1 отображение);

- они *гладко согласованы*, если только отображение $\mathtt{c}_1{}^{-1} \circ \mathtt{c}_2$ бесконечно дифференцируемо, и его образ открыт.

Определение. Пусть на множестве M задано конечное множество $\mathtt{A}$ карт одной размерности μ; тогда скажем, что это множество $\mathtt{A}$ — *атлас* (или *гладкий атлас*) размерности μ, если

- объединение образов всех карт из множества $\mathtt{A}$ есть множество M;

- для всяких двух разных точек x_1 и x_2 множества M найдутся два непересекающиеся подмножества U_1 и U_2 множества M и две карты $\mathtt{c}_1$ и $\mathtt{c}_2$ из $\mathtt{A}$ такие, что $x_1 \in U_1 \subset \operatorname{im} \mathtt{c}_1$, $x_2 \in U_2 \subset \operatorname{im} \mathtt{c}_2$, прообразы множеств U_1 и U_2 соответственно картами $\mathtt{c}_1$ и $\mathtt{c}_2$ открыты;

- всякие две карты из множества $\mathtt{A}$ непрерывно согласованы (или гладко согласованы).

Определение. Множество M с атласом размерности μ (или гладким атласом размерности μ) на нем называется *многообразием* (или *гладким многообразием*) размерности μ.

Определение. Пусть задано гладкое многообразие M размерности μ; тогда

- отображение $\mathtt{f} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ называется *гладким* (кратко обозначим $\mathtt{f} \in \in \mathcal{C}^\infty(M)$), если для всякой карты $\mathtt{c}$ заданного атласа бесконечно дифференцируема функция $\mathtt{f} \circ \mathtt{c} : \mathbb{R}^\mu \longrightarrow \mathbb{R}$;

- если даны разные числа $a, b \in \mathbb{R}$, то отображение $\mathtt{k} : (a, b) \longrightarrow M$ называется *гладким* (оно задает *гладкую кривую* на многообразии M), если для всякой карты $\mathtt{c}$ заданного атласа бесконечно дифференцируема функция $\mathtt{c}^{-1} \circ \mathtt{k}$;

- если же также задано гладкое мнообразие N, то отображение $\mathtt{m} : M \longrightarrow \longrightarrow N$ называется *гладким* (кратко обозначим $\mathtt{m} \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$), если для всякой карты $\mathtt{c}_1$ атласа на многообразии M и карты $\mathtt{c}_2$ атласа на многообразии N бесконечно дифференцируема функция $\mathtt{c}_2{}^{-1} \circ \mathtt{f} \circ \mathtt{c}_1$.

§ 3 Тензоры на многообразиях

В этом разделе предполагается, что задано гладкое многообразие M размерности μ. Также здесь и в дальнейшем применяется обозначение ∂_α производной по аргументу с номером α.

Определение 1. Пусть $x \in M$; тогда отображение $v : \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ называется *касательным вектором* в точке x ко многообразию M, если только

- для всяких $a, b \in \mathbb{R}$ и $\mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ выполнено равенство

$$v(a \cdot \mathrm{f} + b \cdot \mathrm{g}) = a \cdot v(\mathrm{f}) + b \cdot v(\mathrm{g});$$

- если $\mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathcal{C}^\infty(M)$, то $v(\mathrm{f} \cdot \mathrm{g}) = v(\mathrm{f}) \cdot \mathrm{g}(x) + \mathrm{f}(x) \cdot v(\mathrm{g})$;

касательное пространство $\mathrm{T}_x M$ в точке x ко многообразию M — совокупность всех касательных векторов в точке x ко многообразию M.

Определение. Удобно обозначить $\mathrm{T}M := \bigcup\limits_{x \in M} \mathrm{T}_x M$; а для каждого вектора v из $\mathrm{T}M$ обозначим его *проекцию* $\mathsf{tpr}\, v := x$ в «точку его приложения», где точка x — единственная точка многообразия M такая, что $v \in \mathrm{T}_x M$.

Замечание. Из Определения 1 очевидно, что $\mathrm{T}_x M$ — линейное вещественное пространство.

Определение. Для гладкой кривой $\mathtt{k} : (a - b, a + b) \longrightarrow M$, где $a \in \mathbb{R}$ и $b > 0$, вводится ее производная $\partial_1 \mathtt{k}(a) = v$ в точке (числе) a как касательный вектор в точке $\mathtt{k}(a)$ по формуле

$$v(\mathrm{f}) := \partial_1(\mathrm{f} \circ \mathtt{k})(a) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=a} (\mathrm{f} \circ \mathtt{k})(t), \quad \mathrm{f} \in \mathcal{C}^\infty(M);$$

этот вектор называется *касательным* к этой кривой в точке (числе) a.

Определение. Если на многообразии M задана карта c, то обозначим *частную производную по координате* с номерами $\alpha = 1, \ldots, \mu$:

$$\partial_{>\alpha}|_x(\mathrm{f}) := (\partial_{>\alpha}\mathrm{f})(x) := (\partial_\alpha(\mathrm{f} \circ \mathsf{c}))\,(x^{>1}, \ldots, x^{>\mu}), \quad \mathrm{f} \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Замечание. Ясно, что $\partial_{>\alpha}|_x \in \mathrm{T}_x M$.

Утверждение. Векторы $\partial_{>1}|_x, \ldots, \partial_{>\mu}|_x$ образуют базис (называемый *каноническим*) в линейном пространстве $\mathrm{T}_x M$; причем *координаты* вектора $v \in \mathrm{T}_x M$ обозначаем $v^{>1}, \ldots, v^{>\mu}$:

$$v = v^{>\alpha} \cdot \partial_{>\alpha}|_x.$$

Определение. Отображение $\mathsf{u} : D \longrightarrow \mathrm{T}M$, где D — открытое подмножество многообразия M, называется *векторным полем* на множестве D, если только

- для всякой точки x множества D верно $\mathsf{tpr}(\mathsf{u}(x)) = x$;

- для произвольной карты с образом (обозначим его U) во множестве D отображение $\mathsf{u}(x)^{>\alpha} =: \mathsf{u}^{>\alpha}(x)$ — гладкая функция от $x \in U$ при $\alpha = 1, \ldots, \mu$.

Определение. Если u — векторное поле на множестве D, а f — гладкая функция, то для $x \in D$ обозначим $(\mathsf{u} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \mathrm{f})(x) := \mathsf{u}(x)(\mathrm{f})$,— *дифференцирование функции векторным полем.*

Определение. Обозначим $\partial_{>\alpha}(x) := \partial_{>\alpha}|_x$,— *координатное векторное поле* при $\alpha = 1, \ldots, \mu$ и точке x из образа координатной карты.

Пример. Вычислим, например, производную векторным полем u с координатным выражением $\partial_{>1}(x) - \partial_{>2}(x)$ функции f с координатным выражением $\mathrm{f}(x) = x^{>1} - x^{>2}$:

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{u} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \mathrm{f})(x) &:= \mathsf{u}(x)(\mathrm{f}) = \\
&= \big(\partial_{>1}(x) - \partial_{>2}(x)\big)\big(x^{>1} - x^{>2}\big) = \big(\partial_{>1}|_x - \partial_{>2}|_x\big)\big(x^{>1} - x^{>2}\big) = \\
&= \partial_{>1}|_x\big(x^{>1} - x^{>2}\big) - \partial_{>2}|_x\big(x^{>1} - x^{>2}\big) = \\
&= \partial_{>1}|_x\big(x^{>1}\big) - \partial_{>1}|_x\big(x^{>2}\big) - \partial_{>2}|_x\big(x^{>1}\big) + \partial_{>2}|_x\big(x^{>2}\big) = \\
&= 1 - 0 - 0 + 1 = 2.
\end{aligned}
$$

Утверждение. Пусть на подмножестве D многообразия M заданы векторные поля u_1 и u_2; тогда отображение, сопоставляющее гладкой функции f гладкую функцию $\mathsf{u}_1 \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} (\mathsf{u}_2 \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \mathrm{f}) - \mathsf{u}_2 \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} (\mathsf{u}_1 \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \mathrm{f})$ является векторным полем на множестве D; оно обозначается $[\![\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2]\!]$ (то есть $[\![\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2]\!] \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \mathrm{f} := \mathsf{u}_1 \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} (\mathsf{u}_2 \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \mathrm{f}) - \mathsf{u}_2 \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} (\mathsf{u}_1 \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \mathrm{f})$) и называется *коммутатором* векторных полей (также называется *скобка Пуассона* или *скобка Ли*); в локальных координатах коммутатор вычисляется по формуле

$$
[\![\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2]\!]^{>\alpha} = \mathsf{u}_1^{>\beta} \cdot \partial_{>\beta}\, \mathsf{u}_2^{>\alpha} - \mathsf{u}_2^{>\beta} \cdot \partial_{>\beta}\, \mathsf{u}_1^{>\alpha}.
$$

Определение. Пусть $x \in M$; тогда ковариантный тензор над $\mathrm{T}_x M$ валентности γ называется *ковариантным тензором* валентности γ в точке x; множество всех таких тензоров обозначается $\mathrm{T}^{*\gamma}_{\;x} M$; при $\gamma = 1$ такие тензоры называются *кокасательными векторами* в точке x; совокупность всех кокасательных векторов в точке x обозначается $\mathrm{T}^{*}{}_x M$.

Определение. Удобно обозначить $\mathrm{T}^{*\gamma} M := \bigcup\limits_{x \in M} \mathrm{T}^{*\gamma}_{\;x} M$ и $\mathrm{T}^{*} M := \bigcup\limits_{x \in M} \mathrm{T}^{*}{}_x M$; и обозначим *проекцию тензора* p из $\mathrm{T}^{*\gamma} M$ в «точку его приложения»: $\mathsf{tpr}\, p := x$, где точка x — единственная точка многообразия M такая, что $p \in \mathrm{T}^{*\gamma}_{\;x} M$.

Определение. Пусть $x \in M$ и задана карта на многообразии M, в образе которой лежит точка x; тогда, поскольку координатные функции на пространстве $\mathrm{T}_x M$ суть одновалентные ковариантные тензоры в точке x, α-тую из них обозначим $\mathrm{d}^{>\alpha}|_x$ по формуле

$$\mathrm{d}^{>\alpha}|_x (v) := v^{>\alpha},$$

где $v \in \mathrm{T}_x M$ и $\alpha = 1, \ldots, \mu$.

Замечание. Легко видеть, что $\mathrm{d}^{>1}|_x, \ldots, \mathrm{d}^{>\mu}|_x$ образуют базис линейного пространства $\mathrm{T}^*{}_x M$, двойственный к базису $\partial_{>1}|_x, \ldots, \partial_{>\mu}|_x$ пространства $\mathrm{T}_x M$.

Утверждение. Всякий ковариантный тензор p валентности γ в точке x многообразия M имеет однозначное координатное представление в базисе $\mathrm{d}^{>1}|_x, \ldots, \mathrm{d}^{>\mu}|_x$:

$$p = p_{>\alpha_1,\ldots,\alpha_\gamma} \cdot \mathrm{d}^{>\alpha_1}|_x \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}^{>\alpha_\gamma}|_x .$$

Определение. Отображение $\mathsf{q} : D \longrightarrow \mathrm{T}^{*\gamma} M$, где D — открытое подмножество многообразия M, называется *ковариантным тензорным полем валентности γ* на множестве D, если только

- для всякой точки x множества D верно $\mathsf{tpr}(\mathsf{q}(x)) = x$;
- для произвольной карты с образом (обозначим его U) во множестве D при $x \in U$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_\gamma = 1, \ldots, \mu$ функция $\mathsf{q}(x)_{>\alpha_1,\ldots,\alpha_\gamma} =: \mathsf{q}_{>\alpha_1,\ldots,\alpha_\gamma}(x)$ гладкая.

Определение. Обозначим $\mathrm{d}^{>\alpha}(x) := \mathrm{d}^{>\alpha}|_x$,— *координатное ковекторное поле* при $\alpha = 1, \ldots, \mu$ и точке x из образа координатной карты.

Определение. Пусть q — ковариантное тензорное поле валентности γ на некотором подмножестве многообразия M, и u_1, …, u_γ — векторные поля на том же множестве; тогда обозначим

$$(\mathsf{q} \blacktriangleleft \mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_\gamma)(x) := \mathsf{q}(x)\big(\mathsf{u}_1(x), \ldots, \mathsf{u}_\gamma(x)\big),$$

где точка x из того же множества.

§ 4 Дифференциалы отображений и переносы ими тензоров

В этом разделе предполагается, что задано гладкое многообразие M размерности μ.

Определение. Пусть $\mathrm{f} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ и $x \in M$; тогда обозначим *дифференциал* функции f в точке x по формуле

$$\mathsf{d}\mathrm{f}(x)(v) := v(\mathrm{f}), \quad \text{где } v \in \mathrm{T}_x M \text{ и } x \in M,\text{—}$$

отображение, действующее на множестве $\mathrm{T}_x M$.

Замечание. Дифференциал отображения в точке линеен по умножению отображения на число:

$$\mathsf{d}(a \cdot \mathrm{f} + b \cdot \mathrm{g})(x)(v) = v(a \cdot \mathrm{f} + b \cdot \mathrm{g}) = \\ = a \cdot v(\mathrm{f}) + b \cdot v(\mathrm{g}) = a \cdot \mathsf{d}\mathrm{f}(x)(v) + b \cdot \mathsf{d}\mathrm{g}(x)(v),$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $v \in \mathrm{T}_x M$; а также он обладает свойством Лейбница:

$$\mathsf{d}(\mathrm{f} \cdot \mathrm{g})(x)(v) = v(\mathrm{f} \cdot \mathrm{g}) = \\ = v(\mathrm{f}) \cdot \mathrm{g}(x) + \mathrm{f}(x) \cdot v(\mathrm{g}) = \mathsf{d}\mathrm{f}(x)(v) \cdot \mathrm{g}(x) + \mathrm{f}(x) \cdot \mathsf{d}\mathrm{g}(x)(v).$$

Замечание. Если $\mathrm{f}(x) = x^{>\alpha}$ — α-тая координатная функция, то

$$\mathsf{d}\mathrm{f}(x)(v) = v(\mathrm{f}) = v^{>\beta} \cdot \partial_{>\beta} x^{>\alpha} = v^{>\beta} \cdot \mathsf{kron}^{\alpha}_{\beta} = v^{>\alpha} = \mathrm{d}^{>\alpha}|_x(v) = \mathrm{d}^{>\alpha}(x)(v),$$

где $v \in \mathrm{T}_x M$ и $x \in M$; то есть $\mathsf{d}x^{>\alpha} = \mathrm{d}^{>\alpha}(x)$.

Замечание. Поэтому вычислим для произвольной гладкой функции f, предполагая $v \in \mathrm{T}_x M$ и $x \in M$:

$$\mathsf{d}\mathrm{f}(x)(v) = v(\mathrm{f}) = v^{>\alpha} \cdot \partial_{>\alpha} \mathrm{f}(x) = \partial_{>\alpha} \mathrm{f}(x) \cdot \mathsf{d}x^{>\alpha}(v),$$

то есть $\mathsf{d}\mathrm{f}(x) = \partial_{>\alpha} \mathrm{f}(x) \cdot \mathsf{d}x^{>\alpha}$.

Определение. Пусть задано также гладкое многообразие N размерности ν, а также гладкое отображение $\mathtt{m} \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$; обозначим тогда *дифференциал* этого отображения в точке $x \in M$ по формуле

$$\mathsf{d}\mathtt{m}(x)(v)(\mathrm{f}) := v(\mathrm{f} \circ \mathtt{m}), \quad \mathrm{f} \in \mathcal{C}^\infty(N),\ v \in \mathrm{T}_x M.$$

Часто переход $v \longmapsto \mathsf{d}\mathtt{m}(x)(v)$ называют переносом по отображению $\mathtt{m}$ в точке x.

Замечание. Нетрудно установить, что $\mathsf{d}\mathtt{m}(x)$ — линейный оператор из $\mathrm{T}_x M$ в $\mathrm{T}_{\mathtt{m}(x)} N$.

Замечание. Если задана точка $x \in M$ и отображение $\mathrm{m} \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$, то вычислим в локальных координатах, предполагая $\mathrm{f} \in \mathcal{C}^\infty(N)$ и $v \in \mathrm{T}_x M$:

$$\mathrm{dm}(x)(v)(\mathrm{f}) = v(\mathrm{f} \circ \mathrm{m}) = v^{>\alpha} \cdot \partial_{>\alpha}(\mathrm{f} \circ \mathrm{m})(x) =$$
$$= v^{>\alpha} \cdot \partial_{>\beta} \mathrm{f}(\mathrm{m}(x)) \cdot \partial_{>\alpha}\left(\mathrm{m}^{>\beta}\right)(x) = \left(v^{>\alpha} \cdot \partial_{>\alpha}\left(\mathrm{m}^{>\beta}\right)(x)\right) \cdot \partial_{>\beta} \mathrm{f}(\mathrm{m}(x)),$$

то есть $\mathrm{dm}(x)(v)^{>\beta} = \partial_{>\alpha}\left(\mathrm{m}^{>\beta}\right)(x) \cdot v^{>\alpha}$.

Определение. Пусть $x \in M$, $\mathrm{m} \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$, $p \in \mathrm{T}^{*\gamma}_{\mathrm{m}(x)} N$; тогда, предполагая $v_1, \ldots, v_\gamma \in \mathrm{T}_x M$, обозначим $q \in \mathrm{T}^{*\gamma}_x M$ по формуле

$$q\left(v_1, \ldots, v_\gamma\right) := p\left(\mathrm{dm}(x)(v_1), \ldots, \mathrm{dm}(x)\left(v_\gamma\right)\right),$$

и обозначим этот тензор

$$(\mathrm{m} \underset{x}{\curvearrowleft} p) := q,$$

часто называемый переносом ковариантного тензора против отображения m в точку x.

Определение. Пусть $\mathrm{m} \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$, r — ковариантное тензорное поле валентности γ на многообразии N; тогда при $x \in M$ обозначим новое тензорное поле

$$(\mathrm{m} \underset{\star}{\curvearrowleft} \mathrm{r})(x) := (\mathrm{m} \underset{x}{\curvearrowleft} \mathrm{r}(x)),$$

называемое переносом ковариантного тензорного поля против отображения m.

Замечание. Очевидно, что при переносе против отображения сохраняется антисимметричность.

§ 5 Поток векторного поля

В этом разделе предполагается, что задано гладкое многообразие M размерности μ.

Определение 2. Пусть на гладком многообразии M задано векторное поле v; тогда *потоком* этого поля называется гладкое по совокупности аргументов отображение $\mathrm{f}(t, x)$ со значениями во многообразии M, определенное для всех точек x многообразия M и чисел $t \longrightarrow 0$ локально на M, являющееся решением уравнения

$$\begin{cases} \partial_0 \mathrm{f}^{>\alpha}(t, x) = \mathrm{v}^{>\alpha}(\mathrm{f}(t, x)) \quad \text{при } \alpha = 1, \ldots, \mu \\ \\ \mathrm{f}(0, x) = x, \end{cases} \tag{1}$$

в котором ∂_0 обозначает производную по аргументу t.

Утверждение 3. У всякого векторного поля v на многообразии M существует его поток f, причем он при $x \in M$ и $t_1, t_2 \longrightarrow 0$ обладает следующими свойствами относительно параметра:

1. $\mathrm{f}\left(t_1, \mathrm{f}\left(t_2, x\right)\right) = \mathrm{f}\left(t_1 + t_2, x\right)$;

2. $\mathrm{f}\left(-t_1, \mathrm{f}\left(t_1, x\right)\right) = x$, то есть $\mathrm{f}\left(t_1, \cdot\right)^{-1}\left(x\right) = \mathrm{f}\left(-t_1, x\right)$

(это известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений).

Далее будут полезны следующие координатно-дифференциальные свойства потока f векторного поля v на многообразии M: Замечание 4, Теорема 5, Теорема 6.

Замечание 4. Если на многообразии M задано векторное поле v с потоком f, то по определению потока верно координатное равенство $\mathrm{f}^{>\beta}\left(0, x\right) = x^{>\beta}$, и потому $\partial_{>\alpha} \mathrm{f}^{>\beta}\left(0, x\right) = \partial_{>\alpha} x^{>\beta} = \mathsf{kron}_{\alpha}^{\beta}$.

Теорема 5. Пусть на многообразии M задано векторное поле v с потоком f; тогда (в обозначениях из Определения 2)

1. $\partial_0 \partial_{>\alpha} \mathrm{f}^{>\beta}\left(t, x\right) = \partial_{>\gamma} \mathrm{v}^{>\beta}\left(\mathrm{f}\left(t, x\right)\right) \cdot \partial_{>\alpha} \mathrm{f}^{>\gamma}\left(t, x\right)$;

2. а при $t = 0$ получаем $\partial_0 \partial_{>\alpha} \mathrm{f}^{>\beta}\left(0, x\right) = \partial_{>\alpha} \mathrm{v}^{>\beta}\left(x\right)$.

Доказательство. Продифференцируем с помощью определяющего уравнения (1):

$$\partial_0 \partial_{>\alpha} \mathrm{f}^{>\beta}\left(t, x\right) = \partial_{>\alpha} \partial_0 \mathrm{f}^{>\beta}\left(t, x\right) =$$
$$= \partial_{>\alpha}\left(\mathrm{v}^{>\beta}\left(\mathrm{f}\left(t, x\right)\right)\right) = \partial_{>\gamma} \mathrm{v}^{>\beta}\left(\mathrm{f}\left(t, x\right)\right) \cdot \partial_{>\alpha} \mathrm{f}^{>\gamma}\left(t, x\right).$$

Откуда при $t = 0$ по Замечанию 4 получим

$$\partial_0 \partial_{>\alpha} \mathrm{f}^{>\beta}\left(0, x\right) = \partial_{>\gamma} \mathrm{v}^{>\beta}\left(\mathrm{f}\left(0, x\right)\right) \cdot \partial_{>\alpha} \mathrm{f}^{>\gamma}\left(0, x\right) =$$
$$= \partial_{>\gamma} \mathrm{v}^{>\beta}\left(x\right) \cdot \mathsf{kron}_{\alpha}^{\gamma} = \partial_{>\alpha} \mathrm{v}^{>\beta}\left(x\right). \boxtimes$$

Теорема 6. Пусть на многообразии M задано векторное поле v с потоком f; тогда

1. $\partial_0\left(\partial_{>\alpha} \mathrm{f}^{>\beta}\left(-t, \mathrm{f}\left(t, x\right)\right)\right) = -\partial_{>\delta} \mathrm{f}^{>\beta}\left(-t, \mathrm{f}\left(t, x\right)\right) \cdot \partial_{>\alpha} \mathrm{v}^{>\delta}\left(\mathrm{f}\left(t, x\right)\right)$;

2. $\partial_0\left(\partial_{>\alpha} \mathrm{f}^{>\beta}\left(-t, \mathrm{f}\left(t, x\right)\right)\right)\Big|_{t=0} = -\partial_{>\alpha} \mathrm{v}^{>\beta}\left(x\right)$.

Доказательство. Продифференцируем для начала по координате левую и правую части выражения $\mathrm{f}(-t,\mathrm{f}(t,x)) = x$ (из второго свойства Теоремы 3) в координатном виде:

$$\partial_{>\alpha}\left(\mathrm{f}^{>\beta}(-t,\mathrm{f}(t,x))\right) = \partial_{>\alpha}\mathrm{f}^{>\beta}(-t+t,x) = \mathsf{kron}_{\alpha}^{\beta}.$$

Из этого по теореме о дифференцировании композиции получим

$$\partial_{>\gamma}\mathrm{f}^{>\beta}(-t,\mathrm{f}(t,x))\cdot\partial_{>\alpha}\mathrm{f}^{>\gamma}(t,x) = \mathsf{kron}_{\alpha}^{\beta}. \tag{2}$$

И теперь полученное продифференцируем по аргументу t:

$$\begin{aligned}\partial_0\left(\partial_{>\gamma}\mathrm{f}^{>\beta}(-t,\mathrm{f}(t,x))\cdot\partial_{>\alpha}\mathrm{f}^{>\gamma}(t,x)\right) = \\ = \partial_0\left(\partial_{>\gamma}\mathrm{f}^{>\beta}(-t,\mathrm{f}(t,x))\right)\cdot\partial_{>\alpha}\mathrm{f}^{>\gamma}(t,x) + \\ + \partial_{>\gamma}\mathrm{f}^{>\beta}(-t,\mathrm{f}(t,x))\cdot\partial_0\partial_{>\alpha}\mathrm{f}^{>\gamma}(t,x) = 0,\end{aligned}$$

так как в формуле (2) справа стоит постоянная.

Заменив здесь во втором слагаемом второй множитель по первой формуле Теоремы 5, получим

$$\begin{aligned}\partial_0\left(\partial_{>\gamma}\mathrm{f}^{>\beta}(-t,\mathrm{f}(t,x))\right)\cdot\partial_{>\alpha}\mathrm{f}^{>\gamma}(t,x) + \\ + \partial_{>\gamma}\mathrm{f}^{>\beta}(-t,\mathrm{f}(t,x))\cdot\partial_{>\delta}\mathrm{v}^{>\gamma}(\mathrm{f}(t,x))\cdot\partial_{>\alpha}\mathrm{f}^{>\delta}(t,x) = 0,\end{aligned}$$

и переменим индексы суммирования:

$$\begin{aligned}\partial_0\left(\partial_{>\alpha}\mathrm{f}^{>\beta}(-t,\mathrm{f}(t,x))\right)\cdot\partial_{>\gamma}\mathrm{f}^{>\alpha}(t,x) + \\ + \partial_{>\delta}\mathrm{f}^{>\beta}(-t,\mathrm{f}(t,x))\cdot\partial_{>\alpha}\mathrm{v}^{>\delta}(\mathrm{f}(t,x))\cdot\partial_{>\gamma}\mathrm{f}^{>\alpha}(t,x) = 0.\end{aligned}$$

Поскольку матрица $\left(\partial_{>\gamma}\mathrm{f}^{>\alpha}(t,x)\right)_{\gamma=1,\ldots,\mu}^{\alpha=1,\ldots,\mu}$ невырождена при $t\longrightarrow 0$, сократим на этот общий множитель:

$$\partial_0\left(\partial_{>\alpha}\mathrm{f}^{>\beta}(-t,\mathrm{f}(t,x))\right) + \partial_{>\delta}\mathrm{f}^{>\beta}(-t,\mathrm{f}(t,x))\cdot\partial_{>\alpha}\mathrm{v}^{>\delta}(\mathrm{f}(t,x)) = 0.$$

Выразив здесь первое слагаемое, получим

$$\partial_0\left(\partial_{>\alpha}\mathrm{f}^{>\beta}(-t,\mathrm{f}(t,x))\right) = -\partial_{>\delta}\mathrm{f}^{>\beta}(-t,\mathrm{f}(t,x))\cdot\partial_{>\alpha}\mathrm{v}^{>\delta}(\mathrm{f}(t,x)).$$

Полагая $t=0$, по Замечанию 4 получим

$$\begin{aligned}\partial_0\left(\partial_{>\alpha}\mathrm{f}^{>\beta}(-t,\mathrm{f}(t,x))\right)\Big|_{t=0} = \\ = -\partial_{>\delta}\mathrm{f}^{>\beta}(-0,\overbrace{\mathrm{f}(0,x)}^{=x})\cdot\partial_{>\alpha}\mathrm{v}^{>\delta}(\overbrace{\mathrm{f}(0,x)}^{=x}) = -\partial_{>\delta}\mathrm{f}^{>\beta}(-0,x)\cdot\partial_{>\alpha}\mathrm{v}^{>\delta}(x) = \\ = -\mathsf{kron}_{\delta}^{\beta}\cdot\partial_{>\alpha}\mathrm{v}^{>\delta}(x) = -\partial_{>\alpha}\mathrm{v}^{>\beta}(x).\boxtimes\end{aligned}$$

§ 6 Дифференцирование дифференциальных форм

В этом разделе предполагается, что задано гладкое многообразие M размерности μ.

Определение. У дифференциальных форм валентности $\sigma = 0, \ldots$ на многообразии M определяется *внешний дифференциал* — дифференциальная форма валентности $(\sigma + 1)$ — следующим индуктивным по валентности способом:

- если $\sigma = 0$, то $\mathsf{dp} := \mathsf{df}$, где $\mathsf{p}(x)() = \mathsf{f}(x), \quad \forall x \in M$;
- $\mathsf{d}(\mathsf{d}x^{>\alpha}) := 0, \quad \alpha = 1, \ldots, \mu$;
- дифференциал формы вида $\mathsf{p}^1 \wedge \mathsf{p}^2$ определяется по формуле
$$\mathsf{d}(\mathsf{p}^1 \wedge \mathsf{p}^2) := (\mathsf{dp}^1) \wedge \mathsf{p}^2 + (-1)^\sigma \cdot \mathsf{p}^1 \wedge (\mathsf{dp}^2),$$
где σ — валентность формы p^1;
- на дифференциальные формы — конечные суммы вышеприведенных — дифференциал продолжается по линейности.

Теорема. Пусть p — дифференциальная форма валентности σ на многообразии M; тогда в локальных координатах дифференциал этой формы может быть выражен по формуле

$$(\mathsf{dp})_{>\alpha_0 \ldots \alpha_\sigma} = \frac{1}{\sigma + 1} \cdot \sum_{\delta=0}^{\delta=\sigma} (-1)^\delta \cdot \partial_{>\alpha_\delta} \mathsf{p}_{\underbrace{>\alpha_0 \ldots \alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\delta}}. \tag{3}$$

Доказательство. Запишем dp через координатное представление формы p (в этих вычислениях для краткости не пишем аргумент поля, подразумевая его наличие):

$$\mathsf{dp} = \mathsf{d}(\mathsf{p}_{>\alpha_1 \ldots \alpha_\sigma} \cdot \mathsf{d}x^{>\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \mathsf{d}x^{>\alpha_\sigma}) =$$

по Определению дифференциала формы

$$= \mathsf{dp}_{>\alpha_1 \ldots \alpha_\sigma} \wedge \mathsf{d}x^{>\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \mathsf{d}x^{>\alpha_\sigma} + \mathsf{p}_{>\alpha_1 \ldots \alpha_\sigma} \cdot \overbrace{\mathsf{d}(\mathsf{d}x^{>\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \mathsf{d}x^{>\alpha_\sigma})}^{=0} =$$
$$= \mathsf{alt}\Big(\mathsf{dp}_{>\alpha_1 \ldots \alpha_\sigma} \otimes \mathsf{d}x^{>\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \mathsf{d}x^{>\alpha_\sigma}\Big) =$$
$$= \frac{1}{(\sigma + 1)!} \cdot \sum_\tau (\operatorname{sign} \tau) \cdot \left(\tau \hookrightarrow \left(\mathsf{dp}_{>\alpha_1 \ldots \alpha_\sigma} \otimes \mathsf{d}x^{>\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \mathsf{d}x^{>\alpha_\sigma}\right)\right) =$$

(здесь и далее сумма по всем перестановкам на $\{1, \ldots, \sigma + 1\}$);

записав дифференциал координатно, перенумеруем индексы суммирования:

$$= \frac{1}{(\sigma+1)!}\cdot\sum_{\tau}(\operatorname{sign}\tau)\cdot\left(\tau\hookrightarrow\left(\partial_{>\alpha_{\sigma+1}}\mathsf{p}_{>\alpha_1\ldots\alpha_\sigma}\cdot dx^{>\alpha_{\sigma+1}}\otimes dx^{>\alpha_1}\otimes\ldots\otimes dx^{>\alpha_\sigma}\right)\right)=$$

$$= \frac{1}{(\sigma+1)!}\cdot\sum_{\tau}(\operatorname{sign}\tau)\cdot\left(\tau\hookrightarrow\left(\partial_{>\alpha_1}\mathsf{p}_{>\alpha_2\ldots\alpha_{\sigma+1}}\cdot dx^{>\alpha_1}\otimes dx^{>\alpha_2}\otimes\ldots\otimes dx^{>\alpha_{\sigma+1}}\right)\right).$$

Поэтому значение дифференциала на векторных полях имеет следующий координатный вид:

$$d\mathsf{p}\blacktriangleleft \mathsf{v}_1,\ldots,\mathsf{v}_{\sigma+1} = \frac{1}{(\sigma+1)!}\cdot\sum_{\tau}(\operatorname{sign}\tau)\cdot$$

$$\cdot\left(\tau\hookrightarrow\left(\partial_{>\alpha_1}\mathsf{p}_{>\alpha_2\ldots\alpha_{\sigma+1}}\cdot dx^{>\alpha_1}\otimes dx^{>\alpha_2}\otimes\ldots\otimes dx^{>\alpha_{\sigma+1}}\right)\right)\blacktriangleleft(\mathsf{v}_1,\ldots,\mathsf{v}_{\sigma+1})=$$

$$= \frac{1}{(\sigma+1)!}\cdot\sum_{\tau}(\operatorname{sign}\tau)\cdot$$

$$\cdot\left(\partial_{>\alpha_1}\mathsf{p}_{>\alpha_2\ldots\alpha_{\sigma+1}}\cdot dx^{>\alpha_1}\otimes dx^{>\alpha_2}\otimes\ldots\otimes dx^{>\alpha_{\sigma+1}}\right)\blacktriangleleft(\mathsf{v}_{\tau(1)},\ldots,\mathsf{v}_{\tau(\sigma+1)})=$$

$$= \frac{1}{(\sigma+1)!}\cdot\sum_{\tau}(\operatorname{sign}\tau)\cdot\partial_{>\alpha_1}\mathsf{p}_{>\alpha_2\ldots\alpha_{\sigma+1}}\cdot \mathsf{v}_{\tau(1)}^{>\alpha_1}\cdot\ldots\cdot \mathsf{v}_{\tau(\sigma+1)}^{>\alpha_{\sigma+1}}=;$$

переобозначив нумерацию индексов, выделим затем первый:

$$= \frac{1}{(\sigma+1)!}\cdot\sum_{\tau}(\operatorname{sign}\tau)\cdot\partial_{>\alpha_{\tau(1)}}\mathsf{p}_{>\alpha_{\tau(2)}\ldots\alpha_{\tau(\sigma+1)}}\cdot \mathsf{v}_1^{>\alpha_1}\cdot\ldots\cdot \mathsf{v}_{\sigma+1}^{>\alpha_{\sigma+1}}=$$

$$= \frac{1}{(\sigma+1)!}\cdot\sum_{\beta=1}^{\beta=\sigma+1}\mathsf{v}_\beta^{>\alpha_\beta}\cdot\sum_{\tau:\tau(1)=\beta}(\operatorname{sign}\tau)\cdot\partial_{>\alpha_\beta}\mathsf{p}_{>\alpha_{\tau(2)}\ldots\alpha_{\tau(\sigma+1)}}\cdot\overbrace{\mathsf{v}_1^{>\alpha_1}\cdot\ldots\cdot \mathsf{v}_{\sigma+1}^{>\alpha_{\sigma+1}}}^{\text{без } \mathsf{v}_\beta}=.$$

По кососимметричности формы заменив порядок нумерации индексов в ней на возрастающий, и потом домножив на число $(\operatorname{sign}\tau)\cdot(-1)^{\beta-1}$ по количеству инверсий, получим

$$= \frac{1}{(\sigma+1)!}\cdot\sum_{\beta=1}^{\beta=\sigma+1}\mathsf{v}_\beta^{>\alpha_\beta}\cdot\sum_{\tau:\tau(1)=\beta}(\operatorname{sign}\tau)\cdot(\operatorname{sign}\tau)\cdot(-1)^{\beta-1}\cdot$$

$$\cdot\partial_{>\alpha_\beta}\mathsf{p}_{>\alpha_1\ldots\alpha_{\beta-1}\alpha_{\beta+1}\ldots\alpha_{\sigma+1}}\cdot\overbrace{\mathsf{v}_1^{>\alpha_1}\cdot\ldots\cdot \mathsf{v}_{\sigma+1}^{>\alpha_{\sigma+1}}}^{\text{без } \mathsf{v}_\beta}=,$$

и после упрощения множителей знака будет

$$= \frac{1}{(\sigma+1)!}\cdot\sum_{\beta=1}^{\beta=\sigma+1}\mathsf{v}_\beta^{>\alpha_\beta}\cdot(-1)^{\beta-1}\cdot\sum_{\tau:\tau(1)=\beta}\partial_{>\alpha_\beta}\mathsf{p}_{>\alpha_1\ldots\alpha_{\beta-1}\alpha_{\beta+1}\ldots\alpha_{\sigma+1}}\cdot\overbrace{\mathsf{v}_1^{>\alpha_1}\cdot\ldots\cdot \mathsf{v}_{\sigma+1}^{>\alpha_{\sigma+1}}}^{\text{без } \mathsf{v}_\beta}=.$$

Поскольку во внутренней сумме все слагаемые (в количестве $(\sigma!)$) одинаковы, преобразуем:

$$= \frac{\sigma!}{(\sigma+1)!}\cdot\sum_{\beta=1}^{\beta=\sigma+1} \mathrm{v}_\beta^{>\alpha_\beta}\cdot(-1)^{\beta-1}\cdot\partial_{>\alpha_\beta}\,\mathrm{p}_{>\alpha_1\dots\alpha_{\beta-1}\alpha_{\beta+1}\dots\alpha_{\sigma+1}}\cdot\overbrace{\mathrm{v}_1^{>\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\mathrm{v}_{\sigma+1}^{>\alpha_{\sigma+1}}}^{\text{без } \mathrm{v}_\beta} =$$

$$= \frac{1}{\sigma+1}\cdot\sum_{\beta=1}^{\beta=\sigma+1}(-1)^{\beta-1}\cdot\partial_{>\alpha_\beta}\,\mathrm{p}_{>\alpha_1\dots\alpha_{\beta-1}\alpha_{\beta+1}\dots\alpha_{\sigma+1}}\cdot\mathrm{v}_1^{>\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\mathrm{v}_{\sigma+1}^{>\alpha_{\sigma+1}}.\boxtimes$$

Теорема 7. Пусть на многообразии M задана σ-валентная дифференциальная форма p и векторные поля $\mathrm{v}_0,\dots,\mathrm{v}_\sigma$; тогда значение внешнего дифференциала этой формы на этих векторных полях выражается по следующей бескоординатной *формуле Картана*:

$$(\sigma+1)\cdot\mathrm{d}\mathrm{p}\blacktriangleleft(\mathrm{v}_0,\dots,\mathrm{v}_\sigma) = \sum_{\delta=0}^{\delta=\sigma}(-1)^\delta\cdot\mathrm{v}_\delta\overset{\mathcal{D}}{\triangleright}(\mathrm{p}\blacktriangleleft(\overbrace{\mathrm{v}_0,\dots,\mathrm{v}_\sigma}^{\text{без } \mathrm{v}_\delta}))+$$

$$+\sum_{0\leqslant\eta<\vartheta\leqslant\sigma}(-1)^{\eta+\vartheta}\cdot\mathrm{p}\blacktriangleleft(\llbracket\mathrm{v}_\eta,\mathrm{v}_\vartheta\rrbracket,\overbrace{\mathrm{v}_0,\dots,\mathrm{v}_\sigma}^{\text{без } \mathrm{v}_\eta,\mathrm{v}_\vartheta}).$$

Доказательство. Применив координатную формулу (3) внешнего дифференциала формы p, запишем (в этих вычислениях также для краткости не пишем аргумент поля, подразумевая его наличие)

$$(\sigma+1)\cdot\mathrm{d}\mathrm{p}\blacktriangleleft(\mathrm{v}_0,\dots,\mathrm{v}_\sigma) = \sum_{\delta=0}^{\delta=\sigma}(-1)^\delta\cdot\partial_{>\alpha_\delta}\,\mathrm{p}_{\underbrace{>\alpha_0\dots\alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\delta}}\cdot\mathrm{v}_0^{>\alpha_0}\cdot\ldots\cdot\mathrm{v}_\sigma^{>\alpha_\sigma} = (*).$$

Преобразуем обособленно слагаемое суммы $(*)$ с номером δ, внося произведение $\mathrm{v}_0^{>\alpha_0}\cdot\ldots\cdot\mathrm{v}_{\delta-1}^{>\alpha_{\delta-1}}\cdot\mathrm{v}_{\delta+1}^{>\alpha_{\delta+1}}\cdot\ldots\cdot\mathrm{v}_\sigma^{>\alpha_\sigma}$ в производную $\partial_{>\alpha_\delta}$:

$$(-1)^\delta\cdot\partial_{>\alpha_\delta}\,\mathrm{p}_{\underbrace{>\alpha_0\dots\alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\delta}}\cdot\mathrm{v}_0^{>\alpha_0}\cdot\ldots\cdot\mathrm{v}_\sigma^{>\alpha_\sigma} = (-1)^\delta\cdot\mathrm{v}_\delta^{>\alpha_\delta}\cdot\partial_{>\alpha_\delta}\,\mathrm{p}_{\underbrace{>\alpha_0\dots\alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\delta}}\cdot\underbrace{\mathrm{v}_0^{>\alpha_0}\cdot\ldots\cdot\mathrm{v}_\sigma^{>\alpha_\sigma}}_{\text{без } \mathrm{v}_\delta} =$$

$$= (-1)^\delta\cdot\mathrm{v}_\delta^{>\gamma}\cdot\partial_{>\gamma}\left(\mathrm{p}_{\underbrace{>\alpha_0\dots\alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\delta}}\cdot\underbrace{\mathrm{v}_0^{>\alpha_0}\cdot\ldots\cdot\mathrm{v}_\sigma^{>\alpha_\sigma}}_{\text{без } \mathrm{v}_\delta}\right)-$$

$$-(-1)^\delta\cdot\mathrm{v}_\delta^{>\gamma}\cdot\mathrm{p}_{\underbrace{>\alpha_0\dots\alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\delta}}\cdot\sum_{\substack{0\leqslant\eta\leqslant\sigma\\ \eta\neq\delta}}\underbrace{\mathrm{v}_0^{>\alpha_0}\cdot\ldots\cdot\mathrm{v}_\sigma^{>\alpha_\sigma}}_{\text{без } \mathrm{v}_\delta,\mathrm{v}_\eta}\cdot\partial_{>\gamma}\mathrm{v}_\eta^{>\alpha_\eta} =,$$

выразив здесь первое слагаемое через бескоординатные операции, получим

$$= (-1)^\delta\cdot\mathrm{v}_\delta\overset{\mathcal{D}}{\triangleright}\left(\mathrm{p}\blacktriangleleft(\underbrace{\mathrm{v}_0,\dots,\mathrm{v}_\sigma}_{\text{без } \mathrm{v}_\delta})\right)-(-1)^\delta\cdot\mathrm{v}_\delta^{>\gamma}\cdot\mathrm{p}_{\underbrace{>\alpha_0\dots\alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\delta}}\cdot\sum_{\substack{0\leqslant\eta\leqslant\sigma\\ \eta\neq\delta}}\underbrace{\mathrm{v}_0^{>\alpha_0}\cdot\ldots\cdot\mathrm{v}_\sigma^{>\alpha_\sigma}}_{\text{без } \mathrm{v}_\delta,\mathrm{v}_\eta}\cdot\partial_{>\gamma}\mathrm{v}_\eta^{>\alpha_\eta}.$$

Подставив полученное выражение в сумму $(*)$, запишем

$$(*) = \sum_{\delta=0}^{\delta=\sigma} (-1)^{\delta} \cdot \mathrm{v}_{\delta} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \Big(\mathrm{p} \blacktriangleleft \big(\underbrace{\mathrm{v}_0, \ldots, \mathrm{v}_\sigma}_{\text{без } \mathrm{v}_\delta} \big) \Big) -$$

$$- \sum_{\delta=0}^{\delta=\sigma} (-1)^{\delta} \cdot \mathrm{v}_{\delta}^{>\gamma} \cdot \mathrm{p}_{>\underbrace{\alpha_0 \ldots \alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\delta}} \cdot \sum_{\substack{0 \leqslant \eta \leqslant \sigma \\ \eta \neq \delta}} \underbrace{\mathrm{v}_0^{>\alpha_0} \cdot \ldots \cdot \mathrm{v}_\sigma^{>\alpha_\sigma}}_{\text{без } \mathrm{v}_\delta, \mathrm{v}_\eta} \cdot \partial_{>\gamma} \mathrm{v}_\eta^{>\alpha_\eta} = (**).$$

Преобразуем вторую сумму в $(**)$ к одной общей:

$$\sum_{\delta=0}^{\delta=\sigma} (-1)^{\delta} \cdot \mathrm{v}_{\delta}^{>\gamma} \cdot \mathrm{p}_{>\underbrace{\alpha_0 \ldots \alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\delta}} \cdot \sum_{\substack{0 \leqslant \eta \leqslant \sigma \\ \eta \neq \delta}} \underbrace{\mathrm{v}_0^{>\alpha_0} \cdot \ldots \cdot \mathrm{v}_\sigma^{>\alpha_\sigma}}_{\text{без } \mathrm{v}_\delta, \mathrm{v}_\eta} \cdot \partial_{>\gamma} \mathrm{v}_\eta^{>\alpha_\eta} =$$

$$= \sum_{\substack{0 \leqslant \eta, \delta \leqslant \sigma \\ \eta \neq \delta}} (-1)^{\delta} \cdot \mathrm{v}_{\delta}^{>\gamma} \cdot \partial_{>\gamma} \mathrm{v}_\eta^{>\alpha_\eta} \cdot \mathrm{p}_{>\underbrace{\alpha_0 \ldots \alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\delta}} \cdot \underbrace{\mathrm{v}_0^{>\alpha_0} \cdot \ldots \cdot \mathrm{v}_\sigma^{>\alpha_\sigma}}_{\text{без } \mathrm{v}_\delta, \mathrm{v}_\eta} =;$$

разделив эту сумму на две отдельные при $\eta < \delta$ и $\eta > \delta$, изменим при этом индексы η и δ во втором случае местами:

$$= \sum_{0 \leqslant \eta < \delta \leqslant \sigma} (-1)^{\delta} \cdot \mathrm{v}_{\delta}^{>\gamma} \cdot \partial_{>\gamma} \mathrm{v}_\eta^{>\alpha_\eta} \cdot \mathrm{p}_{>\underbrace{\alpha_0 \ldots \alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\delta}} \cdot \underbrace{\mathrm{v}_0^{>\alpha_0} \cdot \ldots \cdot \mathrm{v}_\sigma^{>\alpha_\sigma}}_{\text{без } \mathrm{v}_\delta, \mathrm{v}_\eta} +$$

$$+ \sum_{0 \leqslant \eta < \delta \leqslant \sigma} (-1)^{\eta} \cdot \mathrm{v}_{\eta}^{>\gamma} \cdot \partial_{>\gamma} \mathrm{v}_\delta^{>\alpha_\delta} \cdot \mathrm{p}_{>\underbrace{\alpha_0 \ldots \alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\eta}} \cdot \underbrace{\mathrm{v}_0^{>\alpha_0} \cdot \ldots \cdot \mathrm{v}_\sigma^{>\alpha_\sigma}}_{\text{без } \mathrm{v}_\delta, \mathrm{v}_\eta} =,$$

и перейдем к одной сумме с выделением общего множителя:

$$= \sum_{0 \leqslant \eta < \delta \leqslant \sigma} \underbrace{\mathrm{v}_0^{>\alpha_0} \cdot \ldots \cdot \mathrm{v}_\sigma^{>\alpha_\sigma}}_{\text{без } \mathrm{v}_\delta, \mathrm{v}_\eta} \cdot$$

$$\cdot \Big((-1)^{\delta} \cdot \mathrm{v}_{\delta}^{>\gamma} \cdot \partial_{>\gamma} \mathrm{v}_\eta^{>\alpha_\eta} \cdot \mathrm{p}_{>\underbrace{\alpha_0 \ldots \alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\delta}} + (-1)^{\eta} \cdot \mathrm{v}_{\eta}^{>\gamma} \cdot \partial_{>\gamma} \mathrm{v}_\delta^{>\alpha_\delta} \cdot \mathrm{p}_{>\underbrace{\alpha_0 \ldots \alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\eta}} \Big) = (***).$$

Отдельно преобразуем стоящий в скобках множитель из $(***)$, изменяя знаки по кососимметричности формы p (с учетом $\eta < \delta$):

$$(-1)^{\delta} \cdot \mathrm{v}_{\delta}^{>\gamma} \cdot \partial_{>\gamma} \mathrm{v}_\eta^{>\alpha_\eta} \cdot \mathrm{p}_{>\underbrace{\alpha_0 \ldots \alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\delta}} + (-1)^{\eta} \cdot \mathrm{v}_{\eta}^{>\gamma} \cdot \partial_{>\gamma} \mathrm{v}_\delta^{>\alpha_\delta} \cdot \mathrm{p}_{>\underbrace{\alpha_0 \ldots \alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\eta}} =$$

$$= (-1)^{\delta} \cdot \mathrm{v}_{\delta}^{>\gamma} \cdot \partial_{>\gamma} \mathrm{v}_\eta^{>\beta} \cdot (-1)^{\eta} \cdot \mathrm{p}_{>\beta\underbrace{\alpha_0 \ldots \alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\delta, \alpha_\eta}} + (-1)^{\eta} \cdot \mathrm{v}_{\eta}^{>\gamma} \cdot \partial_{>\gamma} \mathrm{v}_\delta^{>\beta} \cdot (-1)^{\delta-1} \cdot \mathrm{p}_{>\beta\underbrace{\alpha_0 \ldots \alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\delta, \alpha_\eta}} =$$

$$= (-1)^{\eta+\delta} \cdot \mathrm{p}_{>\beta\underbrace{\alpha_0 \ldots \alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\delta, \alpha_\eta}} \cdot \Big(\mathrm{v}_{\delta}^{>\gamma} \cdot \partial_{>\gamma} \mathrm{v}_\eta^{>\beta} - \mathrm{v}_{\eta}^{>\gamma} \cdot \partial_{>\gamma} \mathrm{v}_\delta^{>\beta} \Big) =$$

$$= (-1)^{\eta+\delta} \cdot \mathrm{p}_{>\beta\underbrace{\alpha_0 \ldots \alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\delta, \alpha_\eta}} \cdot [\![\mathrm{v}_\delta, \mathrm{v}_\eta]\!]^{>\beta}.$$

Подставив $(***)$ в $(**)$ с учетом последней формулы, преобразуем к бескоординатному виду:

$$(**) = \sum_{\delta=0}^{\delta=\sigma}(-1)^{\delta}\cdot \mathrm{v}_{\delta}\overset{\mathcal{D}}{\triangleright}\Big(\mathrm{p}\blacktriangleleft(\underbrace{\mathrm{v}_0,\ldots,\mathrm{v}_\sigma}_{\text{без } \mathrm{v}_\delta})\Big)-$$

$$-\sum_{0\leqslant\eta<\delta\leqslant\sigma}\underbrace{\mathrm{v}_0^{\succ\alpha_0}\cdot\ldots\cdot\mathrm{v}_\sigma^{\succ\alpha_\sigma}}_{\text{без } \mathrm{v}_\delta,\mathrm{v}_\eta}\cdot(-1)^{\eta+\delta}\cdot \mathrm{p}_{\succ\beta\underbrace{\alpha_0\ldots\alpha_\sigma}_{\text{без } \alpha_\delta,\alpha_\eta}}\cdot\big[\!\big[\mathrm{v}_\delta,\mathrm{v}_\eta\big]\!\big]^{\succ\beta} =$$

$$= \sum_{\delta=0}^{\delta=\sigma}(-1)^{\delta}\cdot \mathrm{v}_{\delta}\overset{\mathcal{D}}{\triangleright}\Big(\mathrm{p}\blacktriangleleft(\underbrace{\mathrm{v}_0,\ldots,\mathrm{v}_\sigma}_{\text{без } \mathrm{v}_\delta})\Big)+$$

$$+\sum_{0\leqslant\eta<\delta\leqslant\sigma}(-1)^{\eta+\delta}\cdot \mathrm{p}\blacktriangleleft\Big(\big[\!\big[\mathrm{v}_\eta,\mathrm{v}_\delta\big]\!\big],\underbrace{\mathrm{v}_0^{\succ\alpha_0}\cdot\ldots\cdot\mathrm{v}_\sigma^{\succ\alpha_\sigma}}_{\text{без } \mathrm{v}_\delta,\mathrm{v}_\eta}\Big).\ \boxtimes$$

2. Построение производной Ли

§ 7 Переносы векторным полем и построение производной Ли

Рассмотрим гладкое многообразие M размерности μ и векторное поле j на нем; поток этого поля обозначим $\mathrm{k}(t,x)$, где $x \in M$, а t — параметр на траектории решения системы

$$\begin{cases} \partial_0 \mathrm{k}^{>\alpha}(t,x) = \mathrm{j}^{>\alpha}(\mathrm{k}(t,x)) \quad \text{при } \alpha = 1,\ldots,\mu \\ \\ \mathrm{k}(0,x) = x, \end{cases} \tag{4}$$

в котором ∂_0 обозначает производную по аргументу t.

Определение. Пусть задана гладкая функция f на многообразии M; обозначим тогда ее *перенос* $\mathrm{j} \looparrowright \mathrm{f} = \mathrm{g}$ векторным полем j по формуле

$$(\mathrm{j} \looparrowright \mathrm{f})(t,y) = \mathrm{g}(t,y) := \mathrm{f}(\mathrm{k}(t,y)).$$

В этой формуле задается «перенос» значения функции f из точки $x = \mathrm{k}(t,y)$ в точку $y = \mathrm{k}(-t,x)$ (см. рис. {1}).

Определение. Пусть теперь задано векторное поле u на многообразии M; обозначим тогда его *перенос* $\mathrm{j} \looparrowright \mathrm{u} = \mathrm{v}$ векторным полем j по формуле

$$(\mathrm{j} \looparrowright \mathrm{u})(t,y) = \mathrm{v}(t,y) := d\mathrm{k}(-t,\mathrm{k}(t,y))(\mathrm{u}(\mathrm{k}(t,y))).$$

В локальных координатах эта формула имеет вид

$$\mathrm{v}^{>\alpha}(t,y) := \partial_{>\beta}\mathrm{k}^{>\alpha}(-t,\mathrm{k}(t,y)) \cdot \mathrm{u}^{>\beta}(\mathrm{k}(t,y)). \tag{5}$$

Как и при переносе числовой функции, здесь задается «перенос» значения векторного поля u из точки $x = \mathrm{k}(t,y)$ в точку $y = \mathrm{k}(-t,x)$ (см. рис. {1}).

Определение. Наконец, пусть на многообразии M задано δ-валентное ковариантное тензорное поле p (в частности, дифференциальная δ-форма); обозначим тогда его *перенос* $\mathrm{j} \looparrowright \mathrm{p} = \mathrm{q}$ векторным полем j по формуле

$$(\mathrm{j} \looparrowright \mathrm{p})(t,y) = \mathrm{q}(t,y) := \Big(\mathrm{k}(t,\cdot) \underset{\star}{\curvearrowleft} \mathrm{p}\Big)(y) = \mathrm{k}(t,\cdot) \underset{y}{\curvearrowleft} \mathrm{p}(\mathrm{k}(t,y)).$$

В локальных координатах эта формула имеет вид

$$\mathrm{q}_{>\alpha_1,\ldots,\alpha_\delta}(t,y) := \partial_{>\alpha_1}\mathrm{k}^{>\beta_1}(t,y) \cdot \ldots \cdot \partial_{>\alpha_\delta}\mathrm{k}^{>\beta_\delta}(t,y) \cdot \mathrm{p}_{>\beta_1,\ldots,\beta_\delta}(\mathrm{k}(t,y)). \tag{6}$$

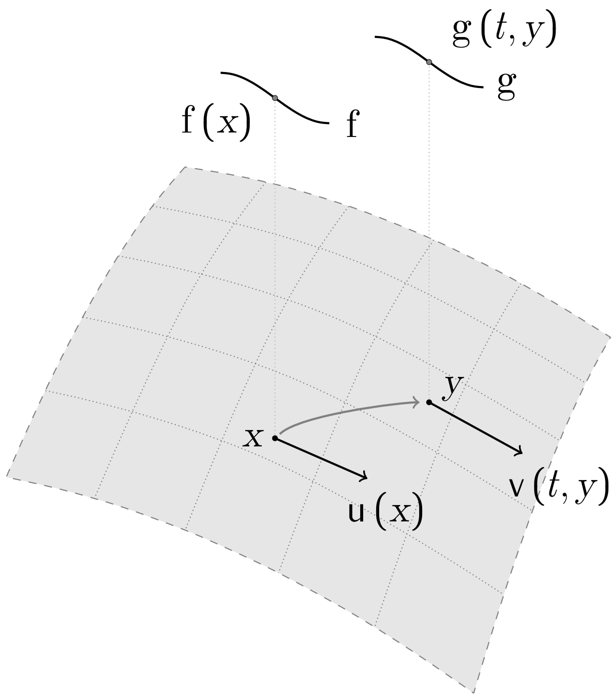

Рис. 1: Переносы векторным полем функции и векторного поля.

Здесь также задан «перенос» значения тензорного поля p из точки $x = \mathrm{k}\left(t, y\right)$ в точку $y = \mathrm{k}\left(-t, x\right)$.

Отметим дополнительно, что непосредственным расчетом устанавливается согласованность всех трех вышеопределенных переносов друг с другом в смысле коммутирования переноса и операции вычисления значения ковариантного тензорного поля на векторных полях; это значит, что для векторных полей $\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_\delta$ и ковариантного тензорного поля p валентности δ выполнена формула

$$\left(\mathsf{j} \curvearrowright \mathrm{f}\right)\left(t, y\right) = \left(\mathsf{j} \curvearrowright \mathsf{p}\right)\left(t, y\right)\Big(\left(\mathsf{j} \curvearrowright \mathsf{u}_1\right)\left(t, y\right), \ldots, \left(\mathsf{j} \curvearrowright \mathsf{u}_\delta\right)\left(t, y\right)\Big),$$

где обозначено $\mathrm{f}\left(x\right) = \mathsf{p}\left(x\right)\big(\mathsf{u}_1\left(x\right), \ldots, \mathsf{u}_\delta\left(x\right)\big)$.

Далее заметим, что перенос векторным полем вводит внешний параметр, и может быть определена скорость переноса относительно этого параметра в начальный момент (при $t = 0$). Ясно при этом, что скорость переноса есть поле того же типа, что и подвергнутое переносу. А поскольку скорость есть производная, ее так и называют — производная Ли (по имени математика Софуса Ли). Ниже определим эту производную более формально.

Определение. Для гладкой функции f на многообразии M, обозначив $\mathrm{g}\left(t, y\right) :=$ $= \left(\mathsf{j} \curvearrowright \mathrm{f}\right)\left(t, y\right)$, определим также гладкую функцию $\mathcal{L}_{\mathsf{j}}\mathrm{f} = \mathrm{h}$ — *производную Ли* гладкой функции f векторным полем j по формуле

$$\mathrm{h}(y) := \partial_0 \mathrm{g}(0, y) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\mathrm{g}(t, y) - \mathrm{g}(0, y)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\mathrm{g}(t, y) - \mathrm{f}(y)}{t}. \tag{7}$$

Определение. Для векторного поля u на многообразии M, обозначив $\mathrm{v}(t, y) := (\mathrm{j} \curvearrowright \mathrm{u})(t, y)$, определим также векторное поле $\mathcal{L}_{\mathrm{j}} \mathrm{u} = \mathrm{w}$ — *производную Ли* векторного поля u векторным полем j по формуле

$$\mathrm{w}(y) := \partial_0 \mathrm{v}(0, y) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\mathrm{v}(t, y) - \mathrm{v}(0, y)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\mathrm{v}(t, y) - \mathrm{u}(y)}{t}. \tag{8}$$

Предел здесь понимается в смысле обычной сходимости в конечномерном пространстве — касательной плоскости к точке y.

Определение 8. Наконец, для δ-валентного ковариантного тензорного поля p на многообразии M, обозначив $\mathrm{q}(t, y) := (\mathrm{j} \curvearrowright \mathrm{p})(t, y)$, определим δ-валентное ковариантное тензорное поле $\mathcal{L}_{\mathrm{j}} \mathrm{p} = \mathrm{r}$ — *производную Ли* δ-валентного ковариантного тензорного поля p векторным полем j по формуле

$$\mathrm{r}(y) := \partial_0 \mathrm{q}(0, y) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\mathrm{q}(t, y) - \mathrm{q}(0, y)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\mathrm{q}(t, y) - \mathrm{p}(y)}{t}. \tag{9}$$

И здесь предел понимается в смысле обычной сходимости в конечномерном пространстве соответствующих тензоров в точке.

Еще раз укажем, что по этим определениям все пределы дают тензоры того же типа, что и исходные; а гладкость сохранится по причине гладкости (бесконечной непрерывной дифференцируемости) исходных зависимостей.

§ 8 Координатное представление

При решении задач с вовлечением производной Ли полезно иметь ее координатное выражение; установим здесь его, предполагая как и в разделе определения производной Ли, что заданы гладкое многообразие M размерности μ и векторное поле j на нем, поток которого обозначен $\mathrm{k}(t, x)$.

Теорема. Пусть задана гладкая функция f на многообразии M; тогда ее производная Ли векторным полем j — гладкая функция $\mathcal{L}_{\mathrm{j}} \mathrm{f} = \mathrm{h}$, вычисляемая в локальных координатах по формуле

$$\mathrm{h}(y) = \mathrm{j}^{>\alpha}(y) \cdot \partial_{>\alpha} \mathrm{f}(y). \tag{10}$$

Доказательство. Вычислим из формул (4) и (7), дифференцируя сложную функцию:

$$\begin{aligned}\mathrm{h}(y) &:= \partial_0 \mathrm{g}(0,y) = \partial_0 \left(\mathrm{f}(\mathrm{k}(t,y))\right)\big|_{t=0} = \\ &= \partial_{>\alpha} \mathrm{f}(\mathrm{k}(t,y))\big|_{t=0} \cdot \partial_0 \mathrm{k}^{>\alpha}(t,y)\big|_{t=0} = \\ &= \mathrm{j}^{>\alpha}(y) \cdot \partial_{>\alpha} \mathrm{f}(y),\end{aligned}$$

поскольку $\mathrm{k}(0,y) = y$ и $\partial_0 \mathrm{k}^{>\alpha}(t,y) = \mathrm{j}^{>\alpha}(\mathrm{k}(t,y))$. ⊠

Теорема. Пусть задано векторное поле u на многообразии M; тогда его производная Ли векторным полем j — векторное поле $\mathcal{L}_{\mathrm{j}} \mathrm{u} = \mathrm{w}$, вычисляемое в локальных координатах по формуле

$$\mathrm{w}^{>\alpha}(y) = \mathrm{j}^{>\beta}(y) \cdot \partial_{>\beta} \mathrm{u}^{>\alpha}(y) - \mathrm{u}^{>\beta}(y) \cdot \partial_{>\beta} \mathrm{j}^{>\alpha}(y). \tag{11}$$

Доказательство. Продифференцируем по формулам (8) и (5):

$$\begin{aligned}\mathrm{w}^{>\alpha}(y) &= \partial_0 \mathrm{v}^{>\alpha}(0,y) = \partial_0 \left(\partial_{>\beta} \mathrm{k}^{>\alpha}(-t, \mathrm{k}(t,y)) \cdot \mathrm{u}^{>\beta}(\mathrm{k}(t,y))\right)\Big|_{t=0} = \\ &= \partial_0 \left(\partial_{>\beta} \mathrm{k}^{>\alpha}(-t, \mathrm{k}(t,y))\right)\Big|_{t=0} \cdot \mathrm{u}^{>\beta}(\mathrm{k}(0,y)) + \\ &\quad + \partial_{>\beta} \mathrm{k}^{>\alpha}(0, \mathrm{k}(0,y)) \cdot \partial_0 \left(\mathrm{u}^{>\beta}(\mathrm{k}(t,y))\right)\Big|_{t=0} =,\end{aligned}$$

применив здесь второее свойство из Теоремы 6 к первому сомножителю первого слагаемого, а ко второму сомножителю второго слагаемого — теорему о производной композиции, получим

$$\begin{aligned}&= -\partial_{>\beta} \mathrm{j}^{>\alpha}(y) \cdot \mathrm{u}^{>\beta}(y) + \overbrace{\partial_{>\beta} \mathrm{k}^{>\alpha}(0,y)}^{= \mathsf{kron}^{\alpha}_{\beta}} \cdot \partial_{>\gamma} \mathrm{u}^{>\beta}\big(\overbrace{\mathrm{k}(0,y)}^{= y}\big) \cdot \overbrace{\partial_0 \mathrm{k}^{>\gamma}(0,y)}^{= \mathrm{j}^{>\gamma}(y)} = \\ &= -\partial_{>\beta} \mathrm{j}^{>\alpha}(y) \cdot \mathrm{u}^{>\beta}(y) + \mathsf{kron}^{\alpha}_{\beta} \cdot \partial_{>\gamma} \mathrm{u}^{>\beta}(y) \cdot \mathrm{j}^{>\gamma}(y) = \\ &= \mathrm{j}^{>\beta}(y) \cdot \partial_{>\beta} \mathrm{u}^{>\alpha}(y) - \mathrm{u}^{>\beta}(y) \cdot \partial_{>\beta} \mathrm{j}^{>\alpha}(y).\ ⊠\end{aligned}$$

Теорема. Пусть задано δ-валентное ковариантное тензорное поле p на многообразии M; тогда его производная Ли векторным полем j — δ-валентное ковариантное тензорное поле $\mathcal{L}_{\mathrm{j}} \mathrm{p} = \mathrm{r}$, вычисляемое в локальных координатах по формуле

$$\begin{aligned}\mathrm{r}_{>\alpha_1,\ldots,\alpha_\delta}(y) &= \mathrm{j}^{>\beta}(y) \cdot \partial_{>\beta} \mathrm{p}_{>\alpha_1,\ldots,\alpha_\delta}(y) + \\ &\quad + \sum_{\eta=1}^{\eta=\delta} \mathrm{p}_{>\alpha_1,\ldots,\alpha_{\eta-1},\beta,\alpha_{\eta+1},\ldots,\alpha_\delta}(y) \cdot \partial_{>\alpha_\eta} \mathrm{j}^{>\beta}(y).\end{aligned} \tag{12}$$

Доказательство. Продифференцируем по формулам (9) и (6):

$$\begin{aligned}\mathrm{r}_{>\alpha_1,\ldots,\alpha_\delta}(y) &= \partial_0 \mathrm{q}_{>\alpha_1,\ldots,\alpha_\delta}(0,y) = \\ &= \partial_0 \left(\partial_{>\alpha_1} \mathrm{k}^{>\beta_1}(t,y) \cdot \ldots \cdot \partial_{>\alpha_\delta} \mathrm{k}^{>\beta_\delta}(t,y) \cdot \mathrm{p}_{>\beta_1,\ldots,\beta_\delta}(\mathrm{k}(t,y))\right)\Big|_{t=0} =\end{aligned}$$

как производная произведения

$$= \partial_{>\alpha_1} \mathrm{k}^{>\beta_1}(0,y)\cdot\ldots\cdot\partial_{>\alpha_\delta}\mathrm{k}^{>\beta_\delta}(0,y)\cdot\partial_0\Big(\mathrm{p}_{>\beta_1,\ldots,\beta_\delta}(\mathrm{k}(t,y))\Big)\Big|_{t=0}+$$
$$+\sum_{\eta=1}^{\eta=\delta}\mathrm{p}_{>\beta_1,\ldots,\beta_\delta}(y)\cdot\partial_{>\alpha_1}\mathrm{k}^{>\beta_1}(0,y)\cdot\ldots\cdot\partial_{>\alpha_{\eta-1}}\mathrm{k}^{>\beta_{\eta-1}}(0,y)\cdot$$
$$\cdot\partial_0\partial_{>\alpha_\eta}\mathrm{k}^{>\beta_\eta}(0,y)\cdot\partial_{>\alpha_{\eta+1}}\mathrm{k}^{>\beta_{\eta+1}}(0,y)\cdot\ldots\cdot\partial_{>\alpha_\delta}\mathrm{k}^{>\beta_\delta}(0,y)=,$$

применим здесь Замечание 4 и второе свойства из Теоремы 5 и, упростив, получим

$$= \mathsf{kron}^{\beta_1}_{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\mathsf{kron}^{\beta_\delta}_{\alpha_\delta}\cdot\partial_{>\gamma}\mathrm{p}_{>\beta_1,\ldots,\beta_\delta}(y)\cdot\partial_0\mathrm{k}^{>\gamma}(0,y)+$$
$$+\sum_{\eta=1}^{\eta=\delta}\mathrm{p}_{>\beta_1,\ldots,\beta_\delta}(y)\cdot\mathsf{kron}^{\beta_1}_{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\mathsf{kron}^{\beta_{\eta-1}}_{\alpha_{\eta-1}}\cdot\partial_{>\alpha_\eta}\mathrm{j}^{>\beta_\eta}(y)\cdot\mathsf{kron}^{\beta_{\eta+1}}_{\alpha_{\eta+1}}\cdot\ldots\cdot\mathsf{kron}^{\beta_\delta}_{\alpha_\delta}=$$
$$=\mathrm{j}^{>\beta}(y)\cdot\partial_{>\beta}\mathrm{p}_{>\alpha_1,\ldots,\alpha_\delta}(y)+\sum_{\eta=1}^{\eta=\delta}\mathrm{p}_{>\alpha_1,\ldots,\alpha_{\eta-1},\beta,\alpha_{\eta+1},\ldots,\alpha_\delta}(y)\cdot\partial_{>\alpha_\eta}\mathrm{j}^{>\beta}(y).\ \boxtimes$$

§ 9 Бескоординатные свойства

Установим в этом разделе бескоординатное представление производной Ли, а также правило Лейбница, предполагая как и в разделе определения производной Ли, что заданы гладкое многообразие M размерности μ и векторное поле j на нем.

Замечание 9. Из определения 8 очевидно следует, что для ковариантного тензорного поля

- коммутируют его производная Ли и перестановка его аргументов — векторных полей;
- а если это поле есть дифференциальная форма, то по перестановочности внешнего дифференцирования и переноса формы против отображения ее производная Ли и внешнее дифференцирование также перестановочны.

Теорема. Пусть на многообразии M заданы гладкая функция f и векторное поле u; тогда их производные Ли векторным полем j имеют вид

$$\mathcal{L}_{\mathrm{j}}\mathrm{f}=\mathrm{h}=\mathrm{j}\overset{\mathcal{D}}{\triangleright}\mathrm{f},\qquad \mathcal{L}_{\mathrm{j}}\mathrm{u}=\mathrm{w}=[\![\mathrm{j},\mathrm{u}]\!]\,;$$

а если на многообразии M задано δ-валентное ковариантное тензорное поле p и $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_\delta$ — векторные поля, то значение на них тензорного поля $\mathcal{L}_{\mathsf{j}}\mathsf{p} = \mathsf{r}$ вычисляется по следующей бескоординатной формуле:

$$\begin{aligned}\mathsf{r}\blacktriangleleft(\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_\delta) = \left(\mathcal{L}_{\mathsf{j}}\mathsf{p}\right)\blacktriangleleft(\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_\delta) &= \mathsf{j}\overset{\mathcal{D}}{\triangleright}(\mathsf{p}\blacktriangleleft(\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_\delta)) - \\ &- \sum_{\eta=1}^{\eta=\delta}\mathsf{p}\blacktriangleleft\left(\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{\eta-1},[\![\mathsf{j},\mathsf{u}_\eta]\!],\mathsf{u}_{\eta+1},\dots,\mathsf{u}_\delta\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Доказательство. Вид производных гладкой функции и векторного поля следуют из формул (10) и (11).

В случае же ковариантного поля p проведем расчет значения в локальных координатах, применив формулу (12) (для краткости не будем писать аргумент (y) отображений, подразумевая при этом его наличие):

$$\begin{aligned}(\mathsf{r}\blacktriangleleft(\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_\delta))(y) &= \mathsf{j}^{>\beta}\cdot\partial_{>\beta}\mathsf{p}_{>\alpha_1,\dots,\alpha_\delta}\cdot\mathsf{u}_1^{>\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\mathsf{u}_\delta^{>\alpha_\delta} + \\ &+ \sum_{\eta=1}^{\eta=\delta}\mathsf{p}_{>\alpha_1,\dots,\alpha_{\eta-1},\beta,\alpha_{\eta+1},\dots,\alpha_\delta}\cdot\partial_{>\alpha_\eta}\mathsf{j}^{>\beta}\cdot\mathsf{u}_1^{>\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\mathsf{u}_\delta^{>\alpha_\delta} =\end{aligned}$$

добавим и вычтем слагаемые, чтобы сформировать производную векторным полем j функции $\mathsf{p}\blacktriangleleft(\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_\delta)$:

$$\begin{aligned}&= \mathsf{j}^{>\beta}\cdot\partial_{>\beta}\mathsf{p}_{>\alpha_1,\dots,\alpha_\delta}\cdot\mathsf{u}_1^{>\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\mathsf{u}_\delta^{>\alpha_\delta} + \\ &\quad+ \sum_{\eta=1}^{\eta=\delta}\mathsf{j}^{>\alpha_\eta}\cdot\mathsf{p}_{>\alpha_1,\dots,\alpha_{\eta-1},\beta,\alpha_{\eta+1},\dots,\alpha_\delta}\cdot\mathsf{u}_1^{>\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\mathsf{u}_{\eta-1}^{>\alpha_{\eta-1}}\cdot\partial_{>\alpha_\eta}\mathsf{u}_\eta^{>\beta}\cdot\mathsf{u}_{\eta+1}^{>\alpha_{\eta+1}}\cdot\ldots\cdot\mathsf{u}_\delta^{>\alpha_\delta} - \\ &\quad- \sum_{\eta=1}^{\eta=\delta}\mathsf{j}^{>\alpha_\eta}\cdot\mathsf{p}_{>\alpha_1,\dots,\alpha_{\eta-1},\beta,\alpha_{\eta+1},\dots,\alpha_\delta}\cdot\mathsf{u}_1^{>\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\mathsf{u}_{\eta-1}^{>\alpha_{\eta-1}}\cdot\partial_{>\alpha_\eta}\mathsf{u}_\eta^{>\beta}\cdot\mathsf{u}_{\eta+1}^{>\alpha_{\eta+1}}\cdot\ldots\cdot\mathsf{u}_\delta^{>\alpha_\delta} + \\ &\qquad\qquad+ \sum_{\eta=1}^{\eta=\delta}\mathsf{p}_{>\alpha_1,\dots,\alpha_{\eta-1},\beta,\alpha_{\eta+1},\dots,\alpha_\delta}\cdot\partial_{>\alpha_\eta}\mathsf{j}^{>\beta}\cdot\mathsf{u}_1^{>\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\mathsf{u}_\delta^{>\alpha_\delta} =\end{aligned}$$

из слагаемых двух первых строк формируем производную векторным полем j функции $\mathsf{p}\blacktriangleleft(\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_\delta)$, а последние две суммы запишем в одной сумме:

$$\begin{aligned}&= \mathsf{j}\overset{\mathcal{D}}{\triangleright}(\mathsf{p}\blacktriangleleft(\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_\delta)) + \sum_{\eta=1}^{\eta=\delta}\mathsf{p}_{>\alpha_1,\dots,\alpha_{\eta-1},\beta,\alpha_{\eta+1},\dots,\alpha_\delta}\cdot \\ &\quad\cdot\left(-\mathsf{j}^{>\alpha_\eta}\cdot\mathsf{u}_1^{>\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\mathsf{u}_{\eta-1}^{>\alpha_{\eta-1}}\cdot\partial_{>\alpha_\eta}\mathsf{u}_\eta^{>\beta}\cdot\mathsf{u}_{\eta+1}^{>\alpha_{\eta+1}}\cdot\ldots\cdot\mathsf{u}_\delta^{>\alpha_\delta} + \partial_{>\alpha_\eta}\mathsf{j}^{>\beta}\cdot\mathsf{u}_1^{>\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\mathsf{u}_\delta^{>\alpha_\delta}\right) =\end{aligned}$$

в сумме обособим общие сомножители и перейдем к коммутатору:

$$= \mathrm{j} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} (\mathrm{p} \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\delta)) + \sum_{\eta=1}^{\eta=\delta} \mathrm{p}_{>\alpha_1,\ldots,\alpha_{\eta-1},\beta,\alpha_{\eta+1},\ldots,\alpha_\delta} \cdot$$

$$\cdot\, \mathrm{u}_1^{>\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \mathrm{u}_{\eta-1}^{>\alpha_{\eta-1}} \cdot \mathrm{u}_{\eta+1}^{>\alpha_{\eta+1}} \cdot \ldots \cdot \mathrm{u}_\delta^{>\alpha_\delta} \cdot \left(- \mathrm{j}^{>\alpha_\eta} \cdot \partial_{>\alpha_\eta} \mathrm{u}_\eta^{>\beta} + \partial_{>\alpha_\eta} \mathrm{j}^{>\beta} \cdot \mathrm{u}_\eta^{>\alpha_\eta} \right) =$$

$$= \mathrm{j} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} (\mathrm{p} \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\delta)) - \sum_{\eta=1}^{\eta=\delta} \Big(\mathrm{p} \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\eta-1}, [\![\mathrm{j}, \mathrm{u}_\eta]\!], \mathrm{u}_{\eta+1}, \ldots, \mathrm{u}_\delta) \Big). \boxtimes$$

Следствие. Если u — векторное поле, то производная Ли тензорного поля $\mathrm{p} \overset{\gamma}{\leftarrow} \mathrm{u}$ вычисляется по аналогу правила Лейбница:

$$\mathcal{L}_\mathrm{j} (\mathrm{p} \overset{\gamma}{\leftarrow} \mathrm{u}) = \Big((\mathcal{L}_\mathrm{j} \mathrm{p}) \overset{\gamma}{\leftarrow} \mathrm{u} \Big) + \Big(\mathrm{p} \overset{\gamma}{\leftarrow} (\mathcal{L}_\mathrm{j} \mathrm{u}) \Big) = \Big((\mathcal{L}_\mathrm{j} \mathrm{p}) \overset{\gamma}{\leftarrow} \mathrm{u} \Big) + \Big(\mathrm{p} \overset{\gamma}{\leftarrow} [\![\mathrm{j}, \mathrm{u}]\!] \Big); \qquad (14)$$

также при $\gamma = 1$ это может быть выражено через внутреннее дифференцирование:

$$\mathcal{L}_\mathrm{j} (\mathrm{u} \lrcorner\, \mathrm{p}) = \Big((\mathcal{L}_\mathrm{j} \mathrm{u}) \lrcorner\, \mathrm{p} \Big) + \Big(\mathrm{u} \lrcorner (\mathcal{L}_\mathrm{j} \mathrm{p}) \Big) = ([\![\mathrm{j}, \mathrm{u}]\!] \lrcorner\, \mathrm{p}) + \Big(\mathrm{u} \lrcorner (\mathcal{L}_\mathrm{j} \mathrm{p}) \Big). \qquad (15)$$

Доказательство. Вычислим значение левого тензорного поля из формулы (14) на векторных полях $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\gamma-1}$, $\mathrm{u}_{\gamma+1}, \ldots, \mathrm{u}_\delta$:

$$\Big(\mathcal{L}_\mathrm{j} (\mathrm{p} \overset{\gamma}{\leftarrow} \mathrm{u}) \Big) \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\gamma-1}, \mathrm{u}_{\gamma+1}, \ldots, \mathrm{u}_\delta) =$$

$$= \mathrm{j} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \Big((\mathrm{p} \overset{\gamma}{\leftarrow} \mathrm{u}) \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\gamma-1}, \mathrm{u}_{\gamma+1}, \ldots, \mathrm{u}_\delta) \Big) -$$

$$- \sum_{\eta=1}^{\eta=\gamma-1} (\mathrm{p} \overset{\gamma}{\leftarrow} \mathrm{u}) \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\eta-1}, [\![\mathrm{j}, \mathrm{u}_\eta]\!], \mathrm{u}_{\eta+1}, \ldots, \mathrm{u}_{\gamma-1}, \mathrm{u}_{\gamma+1}, \ldots, \mathrm{u}_\delta) -$$

$$- \sum_{\eta=\gamma+1}^{\eta=\delta} (\mathrm{p} \overset{\gamma}{\leftarrow} \mathrm{u}) \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\gamma-1}, \mathrm{u}_{\gamma+1}, \ldots, \mathrm{u}_{\eta-1}, [\![\mathrm{j}, \mathrm{u}_\eta]\!], \mathrm{u}_{\eta+1}, \ldots, \mathrm{u}_\delta) =$$

внесем поле u в ряд аргументов поля p:

$$= \mathrm{j} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \Big(\mathrm{p} \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\gamma-1}, \mathrm{u}, \mathrm{u}_{\gamma+1}, \ldots, \mathrm{u}_\delta) \Big) -$$

$$- \sum_{\eta=1}^{\eta=\gamma-1} \mathrm{p} \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\eta-1}, [\![\mathrm{j}, \mathrm{u}_\eta]\!], \mathrm{u}_{\eta+1}, \ldots, \mathrm{u}_{\gamma-1}, \mathrm{u}, \mathrm{u}_{\gamma+1}, \ldots, \mathrm{u}_\delta) -$$

$$- \sum_{\eta=\gamma+1}^{\eta=\delta} \mathrm{p} \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\gamma-1}, \mathrm{u}, \mathrm{u}_{\gamma+1}, \ldots, \mathrm{u}_{\eta-1}, [\![\mathrm{j}, \mathrm{u}_\eta]\!], \mathrm{u}_{\eta+1}, \ldots, \mathrm{u}_\delta) =,$$

обозначив $\mathrm{u}_\gamma := \mathrm{u}$ для единообразия слагаемых с нумерованными полями, вычтем и добавим слагаемое $\mathsf{p} \blacktriangleleft (\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{\gamma-1}, [\![\mathsf{j}, \mathsf{u}_\gamma]\!], \mathsf{u}_{\gamma+1}, \ldots, \mathsf{u}_\delta)$:

$$
\begin{aligned}
= \mathsf{j} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \big(\mathsf{p} \blacktriangleleft (\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{\gamma-1}, \mathsf{u}, \mathsf{u}_{\gamma+1}, \ldots, \mathsf{u}_\delta)\big) -& \\
- \sum_{\eta=1}^{\eta=\gamma-1} \mathsf{p} \blacktriangleleft (\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{\eta-1}, [\![\mathsf{j}, \mathsf{u}_\eta]\!], \mathsf{u}_{\eta+1}, \ldots, \mathsf{u}_{\gamma-1}, \mathsf{u}, \mathsf{u}_{\gamma+1}, \ldots, \mathsf{u}_\delta) -& \\
- \mathsf{p} \blacktriangleleft (\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{\gamma-1}, [\![\mathsf{j}, \mathsf{u}_\gamma]\!], \mathsf{u}_{\gamma+1}, \ldots, \mathsf{u}_\delta) -& \\
- \sum_{\eta=\gamma+1}^{\eta=\delta} \mathsf{p} \blacktriangleleft (\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{\gamma-1}, \mathsf{u}, \mathsf{u}_{\gamma+1}, \ldots, \mathsf{u}_{\eta-1}, [\![\mathsf{j}, \mathsf{u}_\eta]\!], \mathsf{u}_{\eta+1}, \ldots, \mathsf{u}_\delta) +& \\
+ \mathsf{p} \blacktriangleleft (\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{\gamma-1}, [\![\mathsf{j}, \mathsf{u}_\gamma]\!], \mathsf{u}_{\gamma+1}, \ldots, \mathsf{u}_\delta) =&
\end{aligned}
$$

заметив, что в первых четырех строках этой формулы стоит производная Ли поля p, и оба полученных слагаемых выражаются через подстановку γ-того аргумента, запишем итоговое выражение:

$$
\begin{aligned}
= \big(\mathcal{L}_\mathsf{j} \mathsf{p}\big) \blacktriangleleft (\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{\gamma-1}, \mathsf{u}, \mathsf{u}_{\gamma+1}, \ldots, \mathsf{u}_\delta) +& \\
+ \mathsf{p} \blacktriangleleft (\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{\gamma-1}, [\![\mathsf{j}, \mathsf{u}_\gamma]\!], \mathsf{u}_{\gamma+1}, \ldots, \mathsf{u}_\delta) =& \\
= \Big((\mathcal{L}_\mathsf{j} \mathsf{p}) \overset{\gamma}{\leftarrow} \mathsf{u}\Big) \blacktriangleleft (\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{\gamma-1}, \mathsf{u}_{\gamma+1}, \ldots, \mathsf{u}_\delta) +& \\
+ \Big(\mathsf{p} \overset{\gamma}{\leftarrow} [\![\mathsf{j}, \mathsf{u}]\!]\Big) \blacktriangleleft (\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{\gamma-1}, \mathsf{u}_{\gamma+1}, \ldots, \mathsf{u}_\delta).& \ \boxtimes
\end{aligned}
$$

Следствие. Пусть на многообразии M заданы δ_1-валентное ковариантное тензорное поле p^1 и δ_2-валентное ковариантное тензорное поле p^2; тогда

$$
\mathcal{L}_\mathsf{j} (\mathsf{p}^1 \otimes \mathsf{p}^2) = \big(\mathcal{L}_\mathsf{j} \mathsf{p}^1\big) \otimes \mathsf{p}^2 + \mathsf{p}^1 \otimes \big(\mathcal{L}_\mathsf{j} \mathsf{p}^2\big). \tag{16}
$$

Доказательство. Предположив, что на многообразии M заданы векторные поля $\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{\delta_1+\delta_2}$, запишем по формуле (13):

$$
\begin{aligned}
\big(\mathcal{L}_\mathsf{j} (\mathsf{p}^1 \otimes \mathsf{p}^2)\big) \blacktriangleleft (\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{\delta_1+\delta_2}) =& \\
= \mathsf{j} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \big((\mathsf{p}^1 \otimes \mathsf{p}^2) \blacktriangleleft (\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{\delta_1+\delta_2})\big) -& \\
- \sum_{\eta=1}^{\eta=\delta_1+\delta_2} (\mathsf{p}^1 \otimes \mathsf{p}^2) \blacktriangleleft (\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{\eta-1}, [\![\mathsf{j}, \mathsf{u}_\eta]\!], \mathsf{u}_{\eta+1}, \ldots, \mathsf{u}_{\delta_1+\delta_2}) =&,
\end{aligned}
$$

распределив слагаемые суммы по номерам в диапазонах валентностей тензоров, и представив значение тензорного произведения как произведение значений, получим

$$= \mathrm{j} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \left(\left(\mathrm{p}^1 \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1}) \right) \cdot \left(\mathrm{p}^2 \blacktriangleleft (\mathrm{u}_{\delta_1+1}, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1+\delta_2}) \right) \right) -$$
$$- \sum_{\eta=1}^{\eta=\delta_1} \Big(\mathrm{p}^1 \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\eta-1}, [\![\mathrm{j}, \mathrm{u}_\eta]\!], \mathrm{u}_{\eta+1}, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1}) \Big) \cdot \left(\mathrm{p}^2 \blacktriangleleft (\mathrm{u}_{\delta_1+1}, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1+\delta_2}) \right) -$$
$$- \sum_{\eta=1+\delta_1}^{\eta=\delta_1+\delta_2} \left(\mathrm{p}^1 \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1}) \right) \cdot \Big(\mathrm{p}^1 \blacktriangleleft (\mathrm{u}_{\delta_1+1}, \ldots, \mathrm{u}_{\eta-1}, [\![\mathrm{j}, \mathrm{u}_\eta]\!], \mathrm{u}_{\eta+1}, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1+\delta_2}) \Big) =,$$

применив правило Лейбница к первому выражению и переменив места слагаемых, получим

$$= \Big(\mathrm{j} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \left(\mathrm{p}^1 \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1}) \right) \Big) \cdot \left(\mathrm{p}^2 \blacktriangleleft (\mathrm{u}_{\delta_1+1}, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1+\delta_2}) \right) -$$
$$- \sum_{\eta=1}^{\eta=\delta_1} \Big(\mathrm{p}^1 \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\eta-1}, [\![\mathrm{j}, \mathrm{u}_\eta]\!], \mathrm{u}_{\eta+1}, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1}) \Big) \cdot \left(\mathrm{p}^2 \blacktriangleleft (\mathrm{u}_{\delta_1+1}, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1+\delta_2}) \right) +$$
$$+ \left(\mathrm{p}^1 \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1}) \right) \cdot \Big(\mathrm{j} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \left(\mathrm{p}^2 \blacktriangleleft (\mathrm{u}_{\delta_1+1}, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1+\delta_2}) \right) \Big) -$$
$$- \sum_{\eta=1+\delta_1}^{\eta=\delta_1+\delta_2} \left(\mathrm{p}^1 \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1}) \right) \cdot \Big(\mathrm{p}^1 \blacktriangleleft (\mathrm{u}_{\delta_1+1}, \ldots, \mathrm{u}_{\eta-1}, [\![\mathrm{j}, \mathrm{u}_\eta]\!], \mathrm{u}_{\eta+1}, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1+\delta_2}) \Big) =,$$

выделив общие множители в первых двух и последних двух слагаемых, получим по формуле (13)

$$= \Big(\left(\mathcal{L}_\mathrm{j}\, \mathrm{p}^1 \right) \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1}) \Big) \cdot \left(\mathrm{p}^2 \blacktriangleleft (\mathrm{u}_{\delta_1+1}, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1+\delta_2}) \right) +$$
$$+ \left(\mathrm{p}^1 \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1}) \right) \cdot \Big(\left(\mathcal{L}_\mathrm{j}\, \mathrm{p}^2 \right) \mathrm{p}^2 \blacktriangleleft (\mathrm{u}_{\delta_1+1}, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1+\delta_2}) \Big) =$$
$$= \Big(\left(\mathcal{L}_\mathrm{j}\, \mathrm{p}^1 \right) \otimes \mathrm{p}^2 \Big) \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1+\delta_2}) + \Big(\mathrm{p}^1 \otimes \left(\mathcal{L}_\mathrm{j}\, \mathrm{p}^2 \right) \Big) \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1+\delta_2}) =$$
$$= \Big(\left(\mathcal{L}_\mathrm{j}\, \mathrm{p}^1 \right) \otimes \mathrm{p}^2 + \mathrm{p}^1 \otimes \left(\mathcal{L}_\mathrm{j}\, \mathrm{p}^2 \right) \Big) \blacktriangleleft (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\delta_1+\delta_2}). \boxtimes$$

Следствие. Из Замечания 9 и формулы (16) по линейности следует, что если на многообразии M заданы δ_1-валентная дифференциальная форма p^1 и δ_2-валентная дифференциальная форма p^2, то

$$\mathcal{L}_\mathrm{j} \left(\mathrm{p}^1 \wedge \mathrm{p}^2 \right) = \left(\mathcal{L}_\mathrm{j}\, \mathrm{p}^1 \right) \wedge \mathrm{p}^2 + \mathrm{p}^1 \wedge \left(\mathcal{L}_\mathrm{j}\, \mathrm{p}^2 \right).$$

§ 10 Инфинитезимальная формула Стокса

В этом разделе покажем связь производной Ли дифференциальной формы с внешним и внутренним дифференцированиями, предполагая как и в разделе определения производной Ли, что заданы гладкое многообразие M размерности μ и векторное поле v на нем.

Теорема. Пусть на многообразии M задана дифференциальная форма p валентности α; тогда выполняется *инфинитезимальная формула Стокса*:

$$\mathcal{L}_{\mathsf{v}}\,\mathsf{p} = \mathsf{v} \lrcorner \mathsf{dp} + \mathsf{d}(\mathsf{v} \lrcorner \mathsf{p}). \tag{17}$$

Доказательство. Предположив, что на многообразии M заданы векторные поля $\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_\alpha$, запишем по формуле Картана (см. Теорему 7) значение формы $\mathsf{v} \lrcorner \mathsf{dp}$ на них (поле v соответствует в ней полю w_0):

$$(\mathsf{v} \lrcorner \mathsf{dp}) \blacktriangleleft (\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_\alpha) = (\alpha + 1) \cdot \mathsf{dp} \blacktriangleleft (\mathsf{v}, \mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_\alpha) =$$

$$= (-1)^0 \cdot \mathsf{v} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} (\mathsf{p} \blacktriangleleft (\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_\alpha)) + \sum_{\delta=1}^{\delta=\alpha} (-1)^\delta \cdot \mathsf{w}_\delta \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} (\mathsf{p} \blacktriangleleft (\mathsf{v}, \overbrace{\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_\alpha}^{\text{без } \mathsf{w}_\delta})) +$$

$$+ \sum_{\gamma=1}^{\gamma=\alpha} (-1)^{0+\gamma} \cdot \mathsf{p} \blacktriangleleft ([\![\mathsf{v}, \mathsf{w}_\gamma]\!], \underbrace{\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_\alpha}_{\text{без } \mathsf{w}_\gamma}) +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant \beta < \gamma \leqslant \alpha} (-1)^{\beta+\gamma} \cdot \mathsf{p} \blacktriangleleft ([\![\mathsf{w}_\beta, \mathsf{w}_\gamma]\!], \mathsf{v}, \overbrace{\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_\alpha}^{\text{без } \mathsf{w}_\beta, \mathsf{w}_\gamma}) =,$$

переставив в третьем слагаемом коммутатор с первой позиции на γ-тую (и потому домножив по кососимметричности формы на число $(-1)^{\gamma-1}$ по числу транспозиций при этой перестановке), переставив затем третье слагаемое со вторым, и в последнем слагаемом переставив $[\![\mathsf{w}_\beta, \mathsf{w}_\gamma]\!]$ и v (и потому изменив знак этого слагаемого), получим

$$= \mathsf{v} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} (\mathsf{p} \blacktriangleleft (\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_\alpha)) +$$

$$+ \sum_{\gamma=1}^{\gamma=\alpha} (-1)^{0+\gamma} \cdot (-1)^{\gamma-1} \cdot \mathsf{p} \blacktriangleleft (\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_{\gamma-1}, [\![\mathsf{v}, \mathsf{w}_\gamma]\!], \mathsf{w}_{\gamma+1}, \ldots, \mathsf{w}_\alpha) +$$

$$+ \sum_{\delta=1}^{\delta=\alpha} (-1)^\delta \cdot \mathsf{w}_\delta \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} (\mathsf{p} \blacktriangleleft (\mathsf{v}, \underbrace{\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_\alpha}_{\text{без } \mathsf{w}_\delta})) +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant \beta < \gamma \leqslant \alpha} (-1)^{\beta+\gamma} \cdot (-1) \cdot \mathsf{p} \blacktriangleleft (\mathsf{v}, [\![\mathsf{w}_\beta, \mathsf{w}_\gamma]\!], \overbrace{\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_\alpha}^{\text{без } \mathsf{w}_\beta, \mathsf{w}_\gamma}) =,$$

поскольку первое и второе слагаемые образуют производную Ли формы p, а в третьем и четвертом слагаемых поле v стоит на первых позициях, соответствуя внутреннему дифференциалу той же формы, перепишем

$$= (\mathcal{L}_{\mathsf{v}}\,\mathsf{p}) \blacktriangleleft (\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_\alpha) - \frac{1}{\alpha} \cdot \sum_{\delta=0}^{\delta=\alpha-1} (-1)^\delta \cdot \mathsf{w}_{\delta+1} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} ((\mathsf{v} \lrcorner \mathsf{p}) \blacktriangleleft (\overbrace{\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_\alpha}^{\text{без } \mathsf{w}_{\delta+1}})) -$$

$$- \frac{1}{\alpha} \cdot \sum_{0 \leqslant \beta < \gamma \leqslant \alpha-1} (-1)^{\beta+\gamma+2} \cdot (\mathsf{v} \lrcorner \mathsf{p}) \blacktriangleleft ([\![\mathsf{w}_{\beta+1}, \mathsf{w}_{\gamma+1}]\!], \overbrace{\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_\alpha}^{\text{без } \mathsf{w}_{\beta+1}, \mathsf{w}_{\gamma+1}}) =$$

заметив наконец, что последние две суммы образуют внешний дифференциал формы $\mathrm{v} \lrcorner \mathrm{p}$, перепишем

$$= (\mathcal{L}_{\mathrm{V}}\, \mathrm{p}) \blacktriangleleft (\mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_\alpha) - \mathrm{d}(\mathrm{v} \lrcorner \mathrm{p}) \blacktriangleleft (\mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_\alpha). \boxtimes$$

Следствие. Пусть на многообразии M задана дифференциальная форма p валентности α, а также векторное поле w; тогда выполняется формула

$$\mathrm{w} \lrcorner (\mathrm{v} \lrcorner \mathrm{dp}) = (\mathrm{w} \wedge \mathrm{v}) \lrcorner \mathrm{dp} = \mathcal{L}_{\mathrm{V}} (\mathrm{w} \lrcorner \mathrm{p}) - \mathrm{w} \lrcorner \mathrm{d}(\mathrm{v} \lrcorner \mathrm{p}) + [\![\mathrm{w}, \mathrm{v}]\!] \lrcorner \mathrm{p}\,.$$

Доказательство. Применим формулу (15):

$$\mathcal{L}_{\mathrm{V}} (\mathrm{w} \lrcorner \mathrm{p}) = [\![\mathrm{v}, \mathrm{w}]\!] \lrcorner \mathrm{p} + \mathrm{w} \lrcorner (\mathcal{L}_{\mathrm{V}}\, \mathrm{p}) =$$

применим инфинитезимальную формулу Стокса (17):

$$= [\![\mathrm{v}, \mathrm{w}]\!] \lrcorner \mathrm{p} + \mathrm{w} \lrcorner \Big(\mathrm{v} \lrcorner \mathrm{dp} + \mathrm{d}(\mathrm{v} \lrcorner \mathrm{p})\Big) =$$
$$= [\![\mathrm{v}, \mathrm{w}]\!] \lrcorner \mathrm{p} + \mathrm{w} \lrcorner (\mathrm{v} \lrcorner \mathrm{dp}) + \mathrm{w} \lrcorner \mathrm{d}(\mathrm{v} \lrcorner \mathrm{p}).$$

Выразив же здесь $\mathrm{w} \lrcorner (\mathrm{v} \lrcorner \mathrm{dp})$, получим заявленное. $\boxtimes$

Следствие. В частности, в случае валентности *1* получим формулу

$$\begin{aligned} 2 \cdot \mathrm{dp} \blacktriangleleft (\mathrm{v}, \mathrm{w}) &= \mathrm{v} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} (\mathrm{p} \blacktriangleleft \mathrm{w}) - \mathrm{d}(\mathrm{p} \blacktriangleleft \mathrm{v}) \blacktriangleleft \mathrm{w} + \mathrm{p} \blacktriangleleft [\![\mathrm{w}, \mathrm{v}]\!] = \\ &= \mathrm{d}(\mathrm{p} \blacktriangleleft \mathrm{w}) \blacktriangleleft \mathrm{v} - \mathrm{d}(\mathrm{p} \blacktriangleleft \mathrm{v}) \blacktriangleleft \mathrm{w} + \mathrm{p} \blacktriangleleft [\![\mathrm{w}, \mathrm{v}]\!] = \\ &= \mathrm{v} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} (\mathrm{p} \blacktriangleleft \mathrm{w}) - \mathrm{w} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} (\mathrm{p} \blacktriangleleft \mathrm{v}) + \mathrm{p} \blacktriangleleft [\![\mathrm{w}, \mathrm{v}]\!]\,. \end{aligned} \tag{18}$$

3. Теорема Фробениуса

§ 11 Леммы

В этом разделе предполагается, что задано гладкое многообразие M размерности μ.

Лемма. Пусть на многообразии задано векторное поле $\mathtt{v}$ с его потоком $\mathtt{k}$ (см. обозначения в Определении 2); тогда если $\mathtt{u}$ — векторное поле на многообразии, а ∂_0 — обозначение производной по t в точке $x \in M$, то при $t \longrightarrow 0$ верно

$$\partial_0 \big(\mathtt{dk}\,(t, \mathtt{k}\,(-t, x))(\mathtt{u}\,(\mathtt{k}\,(-t, x))) \big) = -\,\mathtt{dk}\,(t, \mathtt{k}\,(-t, x))(\llbracket \mathtt{v}, \mathtt{u} \rrbracket\,(\mathtt{k}\,(-t, x))),$$

что в координатах соответствует формуле

$$\begin{aligned}\partial_0 \big(\partial_{>\beta}\mathtt{k}^{>\alpha}\,(t, \mathtt{k}\,(-t, x)) \cdot \mathtt{u}^{>\beta}\,(\mathtt{k}\,(-t, x)) \big) = \\ = -\,\partial_{>\beta}\mathtt{k}^{>\alpha}\,(t, \mathtt{k}\,(-t, x)) \cdot \llbracket \mathtt{v}, \mathtt{u} \rrbracket^{>\beta}\,(\mathtt{k}\,(-t, x)).\end{aligned}$$

Доказательство. Продифференцируем левую часть координатного равенства:

$$\begin{aligned}\partial_0 \big(\partial_{>\beta}\mathtt{k}^{>\alpha}\,(t, \mathtt{k}\,(-t, x)) \cdot \mathtt{u}^{>\beta}\,(\mathtt{k}\,(-t, x)) \big) = \\ = \partial_0 \big(\partial_{>\beta}\mathtt{k}^{>\alpha}\,(t, \mathtt{k}\,(-t, x)) \big) \cdot \mathtt{u}^{>\beta}\,(\mathtt{k}\,(-t, x)) + \\ + \partial_{>\beta}\mathtt{k}^{>\alpha}\,(t, \mathtt{k}\,(-t, x)) \cdot \partial_0 \big(\mathtt{u}^{>\beta}\,(\mathtt{k}\,(-t, x)) \big) =,\end{aligned}$$

применив теорему о производной композиции ко второму сомножителю второго слагаемого, получим

$$\begin{aligned}= \partial_0 \big(\partial_{>\beta}\mathtt{k}^{>\alpha}\,(t, \mathtt{k}\,(-t, x)) \big) \cdot \mathtt{u}^{>\beta}\,(\mathtt{k}\,(-t, x)) + \\ + \partial_{>\beta}\mathtt{k}^{>\alpha}\,(t, \mathtt{k}\,(-t, x)) \cdot \partial_{>\gamma}\mathtt{u}^{>\beta}\,(\mathtt{k}\,(-t, x)) \cdot \overbrace{\partial_0 \mathtt{k}^{>\gamma}\,(\mathtt{k}\,(-t, x))}^{= \mathtt{v}^{>\gamma}\,(\mathtt{k}\,(-t, x))} \cdot (-1) =;\end{aligned}$$

после применения к первому сомножителю первого слагаемого первого равенства Теоремы 6 будет

$$\begin{aligned}= \partial_{>\gamma}\mathtt{k}^{>\alpha}\,(t, \mathtt{k}\,(-t, x)) \cdot \partial_{>\beta}\mathtt{v}^{>\gamma}\,(\mathtt{k}\,(-t, x)) \cdot \mathtt{u}^{>\beta}\,(\mathtt{k}\,(-t, x)) + \\ + \partial_{>\beta}\mathtt{k}^{>\alpha}\,(t, \mathtt{k}\,(-t, x)) \cdot \partial_{>\gamma}\mathtt{u}^{>\beta}\,(\mathtt{k}\,(-t, x)) \cdot \mathtt{v}^{>\gamma}\,(\mathtt{k}\,(-t, x)) \cdot (-1) = .\end{aligned}$$

С помощью замены индексов и выделения общего множителя формула преобразуется к

$$\begin{aligned}= \partial_{>\gamma}\mathtt{k}^{>\alpha}\,(t, \mathtt{k}\,(-t, x)) \cdot \Big(\partial_{>\beta}\mathtt{v}^{>\gamma}\,(\mathtt{k}\,(-t, x)) \cdot \mathtt{u}^{>\beta}\,(\mathtt{k}\,(-t, x)) + \\ + \partial_{>\beta}\mathtt{u}^{>\gamma}\,(\mathtt{k}\,(-t, x)) \cdot \mathtt{v}^{>\beta}\,(\mathtt{k}\,(-t, x)) \cdot (-1) \Big) =,\end{aligned}$$

и после замены выражения в скобках по формуле коммутатора получим

$$= -\partial_{>\gamma} \mathrm{k}^{>\alpha}(t, \mathrm{k}(-t, x)) \cdot [\![\mathrm{v}, \mathrm{u}]\!]^{>\gamma}(\mathrm{k}(-t, x)). \boxtimes$$

Лемма 10. Пусть на многообразии задано векторное поле v с его потоком k; тогда если $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\sigma$ — векторные поля на многообразии такие, что коммутатор каждого из них с полем v есть линейная комбинация полей $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\sigma$ с зависящимим от точки коэффициентами, то при $x \in M$, $t \longrightarrow 0$, $\alpha = 1, \ldots, \sigma$ параметрические векторные поля

$$\mathrm{w}_\alpha(t, x) := \mathrm{dk}(t, \mathrm{k}(-t, x))(\mathrm{u}_\alpha(\mathrm{k}(-t, x)))$$

также суть линейные комбинации полей $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\sigma$, но с коэффициентами, зависящими от точки и параметра.

Доказательство. Вычислим производную этих полей по t, применяя предыдущую Лемму:

$$\partial_0 \mathrm{w}_\beta^{>\alpha}(t, x) = -\partial_{>\gamma} \mathrm{k}^{>\alpha}(t, \mathrm{k}(-t, x)) \cdot [\![\mathrm{v}, \mathrm{u}_\beta]\!]^{>\gamma}(\mathrm{k}(-t, x)) =;$$

заменив коммутаторы на их линейные выражения через поля $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\sigma$ с коэффициентами $\mathrm{f}_\beta^\delta(x)$, получим

$$\begin{aligned} &= -\partial_{>\gamma} \mathrm{k}^{>\alpha}(t, \mathrm{k}(-t, x)) \cdot \mathrm{f}_\beta^\delta(\mathrm{k}(-t, x)) \cdot \mathrm{u}_\delta^{>\gamma}(\mathrm{k}(-t, x)) = \\ &\qquad = -\mathrm{f}_\beta^\delta(\mathrm{k}(-t, x)) \cdot \Big(\partial_{>\gamma} \mathrm{k}^{>\alpha}(t, \mathrm{k}(-t, x)) \cdot \mathrm{u}_\delta^{>\gamma}(\mathrm{k}(-t, x))\Big) = \\ &\qquad\qquad = -\mathrm{f}_\beta^\delta(\mathrm{k}(-t, x)) \cdot \mathrm{w}_\delta^{>\alpha}(t, x). \end{aligned}$$

Заметим, что эта совокупность уравнений есть система линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций $\mathrm{w}_1(\cdot, x), \ldots, \mathrm{w}_\sigma(\cdot, x)$ при постоянной точке x.

По теореме Коши о существовании решения дифференциального уравнения первого порядка найдется решение этой системы в линейной оболочке векторов

$$\mathrm{w}_1(0, x) = \mathrm{u}_1(x), \ldots, \mathrm{w}_\sigma(0, x) = \mathrm{u}_\sigma(x)$$

(линейном подпространстве пространства $\mathrm{T}_x M$); и по той же теореме решение это единственно и во всем пространстве $\mathrm{T}_x M$.

Итак, векторы $\mathrm{w}_\beta(t, x)$ суть линейные комбинации векторов $\mathrm{u}_1(x), \ldots, \mathrm{u}_\sigma(x)$ с коэффициентами, зависящими от t. $\boxtimes$

Лемма 11. Пусть на многообразии заданы векторные поля $\mathtt{u}_1, \ldots, \mathtt{u}_\mu$ с линейно независимыми значениями в каждой точке, а также выбраны потоки $\mathtt{k}_1, \ldots, \mathtt{k}_\mu$ этих полей; тогда если $x \in M$, то отображение

$$\mathtt{m}\left(t^1, \ldots, t^\mu\right) := \left(\mathtt{k}_1\left(t^1, \cdot\right) \circ \ldots \circ \mathtt{k}_\mu\left(t^\mu, \cdot\right)\right)(x)$$

есть биекция некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}^\mu$ и некоторой окрестности точки $x = \mathtt{m}(0, \ldots, 0)$; при этом набор частных производных этого отображения по его переменным имеет ранг μ в точках окрестности.

Доказательство. Обозначим индуктивно точки:

$$\begin{cases} y_\mu := x \\ y_{\alpha-1} := \mathtt{k}_\alpha\left(t^\alpha, y_\alpha\right), \quad \alpha = \mu, \ldots, 1. \end{cases}$$

Вычислим производную:

$$\begin{gathered} \partial_1 \mathtt{m}\left(t^1, \ldots, t^\mu\right) = \partial_0 \mathtt{k}_1\left(t^1, y_1\right), \\ \text{и если } 1 < \gamma \leqslant \mu, \text{ то} \\ \partial_\gamma \mathtt{m}\left(t^1, \ldots, t^\mu\right) = \partial_{>\alpha_2} \mathtt{k}_1\left(t^1, y_1\right) \cdot \partial_{>\alpha_3} \mathtt{k}_2^{>\alpha_2}\left(t^2, y_2\right) \cdot \\ \cdot \ldots \cdot \partial_{>\alpha_\gamma} \mathtt{k}_{\gamma-1}^{>\alpha_{\gamma-1}}\left(t^{\gamma-1}, y_{\gamma-1}\right) \cdot \partial_0 \mathtt{k}_\gamma^{>\alpha_\gamma}\left(t^\gamma, y_\gamma\right). \end{gathered} \tag{19}$$

Подставив $t^1 = \ldots = t^\mu = 0$ в эти выражения, по Замечанию 4 и определяющему уравнению потока (1) получим $y_0 = \ldots = y_\mu = x$ и

$$\partial_\gamma \mathtt{m}(0, \ldots, 0) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \partial_0 \mathtt{k}_1(0, x) & \text{при } \gamma = 1 \\ \partial_{>\alpha_2} \mathtt{k}_1(0, x) \cdot \partial_{>\alpha_3} \mathtt{k}_2^{>\alpha_2}(0, x) \cdot & \\ \quad \cdot \ldots \cdot \partial_{>\alpha_\gamma} \mathtt{k}_{\gamma-1}^{>\alpha_{\gamma-1}}(0, x) \cdot \partial_0 \mathtt{k}_\gamma^{>\alpha_\gamma}(0, x) & \text{при } 1 < \gamma \leqslant \mu. \end{array} \right\} =$$

$$= \mathtt{u}_\gamma(x).$$

Поэтому из условия Леммы следует, что векторы

$$\partial_0 \mathtt{m}(0, \ldots, 0), \ldots, \partial_\mu \mathtt{m}(0, \ldots, 0)$$

линейно независимы; и тем самым отображение $\mathtt{m}$ биективно на некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}^\mu$, а векторы его частных производных линейно независимы на этой окрестности. ⊠

Лемма 12. Пусть на многообразии заданы векторные поля $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\mu$ с линейно независимыми значениями в каждой точке, а коммутатор всяких двух полей из $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\sigma$ (при $\sigma \leqslant \mu$) есть линейная комбинация этих полей $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\sigma$ с зависящимим от точки коэффициентами; тогда если выбраны потоки $\mathtt{k}_1, \ldots, \mathtt{k}_\mu$ этих полей, $x \in M$ и отображение $\mathtt{m}$ построено по формуле из предыдущей Леммы, то векторные поля

$$\mathrm{w}_\gamma(y) := \partial_\gamma \mathtt{m}\left(\mathrm{g}^1(y), \ldots, \mathrm{g}^\mu(y)\right) \quad \text{при } \gamma = 1, \ldots, \sigma$$

суть также линейные комбинации полей $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\sigma$ с зависящимим от точки коэффициентами, где функции g^α такие, что

$$\mathrm{g}^\alpha\left(\mathtt{m}\left(t^1, \ldots, t^\mu\right)\right) = t^\alpha \quad \text{при } \gamma = 1, \ldots, \mu,$$

существуют по предыдущей Лемме и теореме о неявном отображении.

Доказательство. Пусть точка $y = y_0$ из окрестности точки x; и определим тогда параметры $t^\alpha := \mathrm{g}^\alpha(y)$, и точки $y_\gamma := \mathtt{k}_\gamma\left(-t^\gamma, y_{\gamma-1}\right)$ при $\gamma > 0$.

Подставив эти значения в формулу (19), получим выражение полей $\mathrm{w}_\gamma(y)$:

$$\mathrm{w}_1(y) = \mathrm{u}_1(y),$$

и если $\gamma > 1$, то

$$\mathrm{w}_\gamma(y) = \left(\mathtt{dk}_1\left(t^1, y_1\right) \circ \ldots \circ \mathtt{dk}_{\gamma-1}\left(t^{\gamma-1}, y_{\gamma-1}\right)\right)\left(\mathrm{u}_\gamma\left(y_{\gamma-1}\right)\right).$$

По Лемме 10 при $1 < \gamma \leqslant \sigma$ векторное поле

$$\mathtt{dk}_{\gamma-1}\left(t^{\gamma-1}, y_{\gamma-1}\right)\left(\mathrm{u}_\gamma\left(y_{\gamma-1}\right)\right) = \\ = \mathtt{dk}_{\gamma-1}\left(t^{\gamma-1}, \mathtt{k}_{\gamma-1}\left(-t^{\gamma-1}, y_{\gamma-2}\right)\right)\left(\mathrm{u}_\gamma\left(\mathtt{k}_{\gamma-1}\left(-t^{\gamma-1}, y_{\gamma-2}\right)\right)\right)$$

есть линейная комбинация полей $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\sigma$.

Таким образом последовательно применяя ту же Лемму с учетом линейности дифференциала, получим заявленное в утверждении. ⊠

§ 12 Распределения и теорема Фробениуса

В этом разделе предполагается, что задано гладкое многообразие M размерности μ.

Рассмотрим на многообразии некоторые векторные поля с линейно независимыми значениями в каждой точке; выберем также некоторую точку многообразия.

Составим в некоторых локальных координатах вокруг выбранной точки матрицу координат значений этих полей. Заметив, что по линейной независимости значений векторных полей ее ранг максимален, дополним затем ее до квадратной невырожденной в окрестности выбранной точки.

Ясно, что дополняющие столбцы можно считать координатами дополнительных векторных полей; и тем самым исходные поля можно дополнить в окрестности выбранной точки до набора векторных полей с линейно независимыми значениями в каждой точке в числе размерности многообразия.

Замечание 13. Итак, если на многообразии заданы векторные поля $\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_\sigma$ с линейно независимыми значениями в каждой точке, и выбрана также некоторая точка многообразия, то найдется окрестность выбранной точки и векторные поля $\mathsf{u}_{\sigma+1}, \ldots, \mathsf{u}_\mu$ на этой окрестности такие, что векторные поля $\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_\mu$ также с линейно независимыми значениями в каждой точке этой окрестности.

Определение. Отображение $\mathcal{Z}$, действующее на некотором открытом подмножестве D многообразия M, и сопоставляющее каждой точке x этого множества некоторое линейное подпространство $\mathcal{Z}(x)$ касательного пространства $\mathrm{T}_x M$, называется *распределением размерности* σ на множестве D, если для каждой точки $x \in D$ найдется окрестность ее во множестве D и набор векторных полей $\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_\sigma$ на той окрестности такие, что для всякой точки y из той окрестности пространство $\mathcal{Z}(y)$ есть линейная оболочка векторов $\mathsf{u}_1(y), \ldots, \mathsf{u}_\sigma(y)$ и эти векторы линейно независимы; поля же эти векторные называются *локальным базисом распределения*.

Определение. Пусть на открытом подмножестве D многообразия задано распределение $\mathcal{Z}$; тогда векторное поле v на этом множестве D называется *сечением* распределения $\mathcal{Z}$, если для каждой точки $x \in D$ вектор $\mathsf{v}(x)$ принадлежит пространству $\mathcal{Z}(x)$.

Определение. Распределение $\mathcal{Z}$ размерности σ на открытом подмножестве D многообразия называется *вполне интегрируемым*, если для всякой точки x из множества D найдется окрестность этой точки во множестве D и гладкие функции $\mathrm{g}^1, \ldots, \mathrm{g}^{\mu-\sigma}$ на той окрестности такие, что для всякой точки y из той окрестности и всякого вектора w из пространства $\mathcal{Z}(y)$ выполнено $\mathsf{d}\mathrm{g}^\alpha(y)(w) = 0$ при $\alpha = 1, \ldots, \mu - \sigma$, а кокасательные векторы $\mathsf{d}\mathrm{g}^1(y), \ldots, \mathsf{d}\mathrm{g}^{\mu-\sigma}(y)$ линейно независимы.

Определение. Распределение называется *инволютивным*, если только коммутатор всяких его двух сечений есть его же сечение.

Лемма 14. Распределение инволютивно, если и только если для всякой точки найдется локальный базис распределения на окрестности этой точки такой, что коммутатор всяких двух полей из этого базиса есть линейная комбинация его полей с коэффициентами, зависящими от точки.

Доказательство. Из инволютивности распределения следует заявленное свойство базиса.

Если же $\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_\sigma$ — локальный базис распределения, а $\mathsf{f}^\alpha(x)\cdot\mathsf{u}_\alpha(x)$ и $\mathsf{h}^\alpha(x)\cdot\mathsf{u}_\alpha(x)$ — локальное разложение сечений распределения, то вычислим их коммутатор:

$$\left[\!\left[\mathsf{f}^\alpha\cdot\mathsf{u}_\alpha, \mathsf{h}^\beta\cdot\mathsf{u}_\beta\right]\!\right]^{>\gamma} = \mathsf{f}^\alpha\cdot\mathsf{u}_\alpha^{>\delta}\cdot\partial_{>\delta}\left(\mathsf{h}^\beta\cdot\mathsf{u}_\beta^{>\gamma}\right) - \mathsf{h}^\beta\cdot\mathsf{u}_\beta^{>\delta}\cdot\partial_{>\delta}\left(\mathsf{f}^\alpha\cdot\mathsf{u}_\alpha^{>\gamma}\right) =$$

по правилу Лейбница

$$= \mathsf{f}^\alpha\cdot\mathsf{u}_\alpha^{>\delta}\cdot\left(\partial_{>\delta}\mathsf{h}^\beta\cdot\mathsf{u}_\beta^{>\gamma} + \mathsf{h}^\beta\cdot\partial_{>\delta}\mathsf{u}_\beta^{>\gamma}\right) - \mathsf{h}^\beta\cdot\mathsf{u}_\beta^{>\delta}\cdot\left(\partial_{>\delta}\mathsf{f}^\alpha\cdot\mathsf{u}_\alpha^{>\gamma} + \mathsf{f}^\alpha\cdot\partial_{>\delta}\mathsf{u}_\alpha^{>\gamma}\right) = .$$

Раскрыв скобки, получим

$$= \mathsf{f}^\alpha\cdot\mathsf{u}_\alpha^{>\delta}\cdot\partial_{>\delta}\mathsf{h}^\beta\cdot\mathsf{u}_\beta^{>\gamma} + \mathsf{f}^\alpha\cdot\mathsf{u}_\alpha^{>\delta}\cdot\mathsf{h}^\beta\cdot\partial_{>\delta}\mathsf{u}_\beta^{>\gamma} -$$
$$- \mathsf{h}^\beta\cdot\mathsf{u}_\beta^{>\delta}\cdot\partial_{>\delta}\mathsf{f}^\alpha\cdot\mathsf{u}_\alpha^{>\gamma} - \mathsf{h}^\beta\cdot\mathsf{u}_\beta^{>\delta}\cdot\mathsf{f}^\alpha\cdot\partial_{>\delta}\mathsf{u}_\alpha^{>\gamma} =$$

после перемещения слагаемых и группировки

$$= \mathsf{f}^\alpha\cdot\mathsf{u}_\alpha^{>\delta}\cdot\partial_{>\delta}\mathsf{h}^\beta\cdot\mathsf{u}_\beta^{>\gamma} - \mathsf{h}^\beta\cdot\mathsf{u}_\beta^{>\delta}\cdot\partial_{>\delta}\mathsf{f}^\alpha\cdot\mathsf{u}_\alpha^{>\gamma} + \mathsf{f}^\alpha\cdot\mathsf{h}^\beta\cdot\left(\mathsf{u}_\alpha^{>\delta}\cdot\partial_{>\delta}\mathsf{u}_\beta^{>\gamma} - \mathsf{u}_\beta^{>\delta}\cdot\partial_{>\delta}\mathsf{u}_\alpha^{>\gamma}\right) =,$$

переменив индексы и выделив общий множитель, получим

$$= \mathsf{u}_\beta^{>\delta}\cdot\mathsf{u}_\alpha^{>\gamma}\cdot\left(\mathsf{f}^\beta\cdot\partial_{>\delta}\mathsf{h}^\alpha - \mathsf{h}^\beta\cdot\partial_{>\delta}\mathsf{f}^\alpha\right) + \mathsf{f}^\alpha\cdot\mathsf{h}^\beta\cdot\left[\!\left[\mathsf{u}_\alpha, \mathsf{u}_\beta\right]\!\right]^{>\gamma}.$$

Обе части последнего выражения суть линейные комбинации полей из локального базиса распределения. ⊠

Лемма. Пусть на множестве D задано распределение $\mathcal{Z}$ размерности σ; тогда если оно вполне интегрируемо, то оно инволютивно.

Доказательство. Возьмем два сечения u и v распределения $\mathcal{Z}$; рассмотрим некоторую точку x из D с ее окрестностью в этом множестве, и гладкие функции $\mathsf{g}^1, \ldots, \mathsf{g}^{\mu-\sigma}$ такие, что для всякой точки y из той окрестности и всякого вектора w из пространства $\mathcal{Z}(y)$ выполнено $\mathsf{dg}^\alpha(y)(w) = 0$ при $\alpha = 1, \ldots, \mu-\sigma$, и кокасательные векторы $\mathsf{dg}^1(y), \ldots, \mathsf{dg}^{\mu-\sigma}(y)$ линейно независимы.

Вычислим:

$$\mathrm{u} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \mathrm{g}^{\alpha} = \mathrm{dg}^{\alpha} \blacktriangleleft \mathrm{u} = 0,$$
$$\mathrm{v} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \mathrm{g}^{\alpha} = \mathrm{dg}^{\alpha} \blacktriangleleft \mathrm{v} = 0,$$

по выбору функций $\mathrm{g}^1, \ldots, \mathrm{g}^{\mu-\sigma}$.

И поэтому

$$\mathrm{dg}^{\alpha} \blacktriangleleft [\![\mathrm{u}, \mathrm{v}]\!] = [\![\mathrm{u}, \mathrm{v}]\!] \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \mathrm{g}^{\alpha} = \mathrm{u} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} (\mathrm{v} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \mathrm{g}^{\alpha}) - \mathrm{v} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} (\mathrm{u} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \mathrm{g}^{\alpha}) = 0.$$

Из этого и соотношения $\sigma + (\mu - \sigma) = \mu$ размерностей следует $[\![\mathrm{u}, \mathrm{v}]\!](x) \in \in \mathcal{Z}(x)$. ⊠

Лемма. Пусть на множестве D задано распределение $\mathcal{Z}$ размерности σ; тогда если оно инволютивно, то оно вполне интегрируемо.

Доказательство. Выберем некоторый локальный базис $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\sigma}$ распределения $\mathcal{Z}$ на некоторой окрестности некоторой точки x.

По Замечанию 13 дополним на некоторой подокрестности точки x эти векторные поля до набора $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{\mu}$ с линейно независимыми значениями в точках.

Выбрав некоторые потоки этих векторных полей, построим из них отображение m по формуле из Леммы 11 для точки x.

По Лемме 11 найдутся функции $\mathrm{g}^1, \ldots, \mathrm{g}^{\mu}$ на окрестности точки x такие, что $\mathrm{g}^{\alpha}\left(\mathrm{m}\left(t^1, \ldots, t^{\mu}\right)\right) = t^{\alpha}$ при $\alpha = 1, \ldots, \mu$.

Обозначим векторные поля

$$\mathrm{w}_{\alpha}(y) := \partial_{\alpha} \mathrm{m}(\mathrm{g}^1(y), \ldots, \mathrm{g}^{\mu}(y)) \quad \text{при } \alpha = 1, \ldots, \mu.$$

При $\alpha, \beta = 1, \ldots, \mu$ вычислим:

$$\begin{aligned}\mathrm{dg}^{\alpha}(y)\left(\mathrm{w}_{\beta}(y)\right) &= \mathrm{w}_{\beta}(y)(\mathrm{g}^{\alpha}) = \partial_{\beta} \mathrm{m}(\mathrm{g}^1(y), \ldots, \mathrm{g}^{\mu}(y))(\mathrm{g}^{\alpha}) = \\ &= \partial_{\beta}(\mathrm{g}^{\alpha} \circ \mathrm{m})(\mathrm{g}^1(y), \ldots, \mathrm{g}^{\mu}(y)) = \partial_{\beta} t^{\alpha}\Big|_{t^{\alpha} = \mathrm{g}^{\alpha}(y)} = \mathrm{kron}^{\alpha}_{\beta}.\end{aligned}$$

В частности, $\mathrm{dg}^{\alpha} \blacktriangleleft \mathrm{w}_{\beta} = 0$ при $\alpha = \sigma + 1, \ldots, \mu$ и $\beta = 1, \ldots, \sigma$.

Поскольку по Леммам 11 и 12 векторы $\mathrm{w}_1(y), \ldots, \mathrm{w}_{\sigma}(y)$ линейно независимы и выражаются линейно через векторы $\mathrm{u}_1(y), \ldots, \mathrm{u}_{\sigma}(y)$, эти векторные поля $\mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_{\sigma}$ суть локальный базис распределения $\mathcal{Z}$.

Поэтому $\mathrm{dg}^{\alpha}(y)(w) = 0$ для всякого вектора $w \in \mathcal{Z}(y)$.

По Лемме 11 ковекторы $\mathrm{d}g^{\sigma+1}(y), \ldots, \mathrm{d}g^{\mu}(y)$ линейно независимы.
Итак, распределение $\mathcal{Z}$ вполне интегрируемо. ⊠

Из последних двух Лемм следует критерий вполне интегрируемости.

Теорема Фробениуса. Пусть на множестве D задано распределение $\mathcal{Z}$; тогда оно вполне интегрируемо, если только оно инволютивно.

§ 13 Инволютивность распределения и дифференциальные формы

В этом разделе предполагается, что задано гладкое многообразие M размерности μ.

Определение. Пусть на некотором открытом множестве заданы одновалентные дифференциальные формы $\mathrm{p}^1, \ldots, \mathrm{p}^\tau$, а также некоторое распределение $\mathcal{Z}$ размерности σ; тогда набор $\mathrm{p}^1, \ldots, \mathrm{p}^\tau$ *сопряжен* с распределением $\mathcal{Z}$, если только

- $\sigma + \tau = \mu$;
- формы $\mathrm{p}^1, \ldots, \mathrm{p}^\tau$ линейно независимы в каждой точке того открытого множества;
- для всякого сечения v распределения $\mathcal{Z}$ верно $\mathrm{p}^\alpha \blacktriangleleft \mathrm{v} = 0$ при $\alpha = 1, \ldots, \tau$.

Определение. Пусть на некотором открытом множестве заданы одновалентные дифференциальные формы $\mathrm{p}^1, \ldots, \mathrm{p}^\tau$; тогда набор $\mathrm{p}^1, \ldots, \mathrm{p}^\tau$ *дифференциально линейно зависим*, если только найдутся одновалентные дифференциальные формы q^α_β при $\alpha, \beta = 1, \ldots, \tau$ такие, что $\mathrm{dp}^\alpha = \mathrm{q}^\alpha_\beta \wedge \mathrm{p}^\beta$ при $\alpha = 1, \ldots, \tau$.

Лемма. Пусть на некоторой окрестности некоторой точки многообразия M задано распределение $\mathcal{Z}$, а также задан сопряженный с ним набор $\mathrm{p}^1, \ldots, \mathrm{p}^\tau$ одновалентных дифференциальных форм; тогда если распределение $\mathcal{Z}$ инволютивно, то набор $\mathrm{p}^1, \ldots, \mathrm{p}^\tau$ дифференциально линейно зависим.

Доказательство. По теореме Фробениуса на некоторой окрестности той же точки существуют гладкие функции $\mathrm{g}^1, \ldots, \mathrm{g}^\tau$ такие, что набор $\mathrm{dg}^1, \ldots, \mathrm{dg}^\tau$ сопряжен с распределением $\mathcal{Z}$.

Поэтому на некоторой окрестности той же точки найдутся гладкие функции f^α_β при $\alpha, \beta = 1, \ldots, \tau$ такие, что $\mathrm{p}^\alpha = \mathrm{f}^\alpha_\beta \cdot \mathrm{dg}^\beta$ при $\alpha = 1, \ldots, \tau$; и аналогично найдутся гладкие функции h^α_β при $\alpha, \beta = 1, \ldots, \tau$ такие, что $\mathrm{dg}^\alpha = \mathrm{h}^\alpha_\beta \cdot \mathrm{p}^\beta$ при $\alpha = 1, \ldots, \tau$.

Следовательно

$$\mathrm{d}p^{\alpha} = \mathrm{d}f^{\alpha}_{\beta} \wedge \mathrm{d}g^{\beta} = \mathrm{d}f^{\alpha}_{\beta} \wedge h^{\beta}_{\gamma} \cdot p^{\gamma} = (h^{\beta}_{\gamma} \cdot \mathrm{d}f^{\alpha}_{\beta}) \wedge p^{\gamma}\,. \boxtimes$$

Лемма. Пусть на некоторой окрестности некоторой точки многообразия M задано распределение $\mathcal{Z}$, а также задан сопряженный с ним набор $p^1, \ldots, p^{\tau}$ одновалентных дифференциальных форм; тогда если набор $p^1, \ldots, p^{\tau}$ дифференциально линейно зависим, то распределение $\mathcal{Z}$ инволютивно.

Доказательство. По определению дифференциальной линейной зависимости найдутся одновалентные дифференциальные формы q^{α}_{β} при $\alpha, \beta = 1, \ldots, \tau$ такие, что $\mathrm{d}p^{\alpha} = q^{\alpha}_{\beta} \wedge p^{\beta}$ при $\alpha = 1, \ldots, \tau$.

Выбрав два сечения v и w распределения $\mathcal{Z}$, вычислим:

$$\mathrm{d}p^{\alpha} \blacktriangleleft (v, w) = (q^{\alpha}_{\beta} \wedge p^{\beta}) \blacktriangleleft (v, w) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \Big((q^{\alpha}_{\beta} \blacktriangleleft v) \cdot (\wedge\, p^{\beta} \blacktriangleleft w) - (q^{\alpha}_{\beta} \blacktriangleleft w) \cdot (\wedge\, p^{\beta} \blacktriangleleft v) \Big) = 0$$

при $\alpha = 1, \ldots, \tau$.

С другой стороны по формуле (18)

$$2 \cdot \mathrm{d}p^{\alpha} \blacktriangleleft (v, w) = v \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} (\overbrace{p^{\alpha} \blacktriangleleft w}^{=0}) - \mathrm{d}(\overbrace{p^{\alpha} \blacktriangleleft v}^{=0}) \blacktriangleleft w + p^{\alpha} \blacktriangleleft [\![w, v]\!] = p^{\alpha} \blacktriangleleft [\![w, v]\!]$$

при $\alpha = 1, \ldots, \tau$.

Следовательно $p^{\alpha} \blacktriangleleft [\![w, v]\!] = 0$ при $\alpha = 1, \ldots, \tau$; откуда $[\![w, v]\!]$ есть сечение распределения $\mathcal{Z}$. $\boxtimes$

Лемма. Пусть на некоторой окрестности некоторой точки многообразия M задан набор $p^1, \ldots, p^{\tau}$ одновалентных дифференциальных форм; тогда если набор $p^1, \ldots, p^{\tau}$ дифференциально линейно зависим, то $\mathrm{d}p^{\alpha} \wedge p^1 \wedge \ldots \wedge p^{\tau} = 0$ при $\alpha = 1, \ldots, \tau$.

Доказательство. По определению дифференциальной линейной зависимости найдутся одновалентные дифференциальные формы q^{α}_{β} при $\alpha, \beta = 1, \ldots, \tau$ такие, что $\mathrm{d}p^{\alpha} = q^{\alpha}_{\beta} \wedge p^{\beta}$ при $\alpha = 1, \ldots, \tau$.

Вычислим:

$$\mathrm{d}p^{\alpha} \wedge p^1 \wedge \ldots \wedge p^{\tau} = q^{\alpha}_{\beta} \wedge p^{\beta} \wedge p^1 \wedge \ldots \wedge p^{\tau} = 0$$

при $\alpha = 1, \ldots, \tau$, ибо каждое слагаемое содержит два одинаковых сомножителя. $\boxtimes$

Лемма. Пусть на некоторой окрестности некоторой точки многообразия M задан набор $p^1, \ldots, p^{\tau}$ поточечно линейно независимых одновалентных дифференциальных форм; тогда если $\mathrm{dp}^{\alpha}\wedge \mathrm{p}^{1}\wedge\ldots\wedge \mathrm{p}^{\tau}=0$ при $\alpha=1,\ldots,\tau$, то набор $\mathrm{p}^{1},\ldots,\mathrm{p}^{\tau}$ дифференциально линейно зависим.

Доказательство. Дополним набор $\mathrm{p}^{1},\ldots,\mathrm{p}^{\tau}$ до базисного (то есть до размерности μ) формами $\mathrm{p}^{\tau+1},\ldots,\mathrm{p}^{\mu}$.

Ясно, что форма dp^{α} есть линейная комбинация произведений $\mathrm{p}^{\beta}\wedge \mathrm{p}^{\gamma}$; и если бы при $\beta,\gamma>\tau$ коэффициенты были ненулевые, то и произведение $\mathrm{dp}^{\alpha}\wedge \mathrm{p}^{1}\wedge\ldots\wedge \mathrm{p}^{\tau}$ было бы ненулевое, что не верно. ⊠

Из последних четырех Лемм следует критерий инволютивности (и вполне интегрируемости).

Теорема. Пусть на некоторой окрестности некоторой точки многообразия M задано распределение $\mathcal{Z}$, а также задан сопряженный с ним набор $\mathrm{p}^{1},\ldots,\mathrm{p}^{\tau}$ одновалентных дифференциальных форм; тогда распределение $\mathcal{Z}$ инволютивно, если только $\mathrm{dp}^{\alpha}\wedge \mathrm{p}^{1}\wedge\ldots\wedge \mathrm{p}^{\tau}=0$ при $\alpha=1,\ldots,\tau$.

4. Разбор примеров

4.1. Дифференциальные формы

§ 14 Вычисление значений

Задание 1. Пусть на некотором двумерном многообразии задана дифференциальная форма p валентности 1, выраженная в локальных координатах по формуле

$$\mathrm{p}\left(x\right) = x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>2} + 2 \cdot x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>1},$$

а в точке y с координатами $y^{>1} = 1$ и $y^{>2} = 2$ задан вектор v с координатами $\mathrm{v}^{>1} = 3$ и $\mathrm{v}^{>2} = 4$; вычислить значение $\mathrm{p}\left(y\right)\left(\mathrm{v}\right)$ дифференциальной формы p в точке y на касательном векторе v в той же точке.

Решение. Напомним, что дифференциальная форма есть отображение, сопоставляющее каждой точке некоторого открытого подмножества многообразия кокасательный вектор в той точке (то есть вещественнозначное линейное отображение на касательном пространстве к этой точке), причем в координатном выражении этой зависимости коэффициенты бесконечно дифференцируемы.

Для вычисления искомого значения следует определить координатное выражение кокасательного вектора $\mathrm{p}\left(y\right)$ — значения дифференциальной формы p в точке y — путем подстановки значений координат точки y в выражение формы p. А затем вычислить сумму призведений координат этого кокасательного вектора $\mathrm{p}\left(y\right)$ и вектора v с одинаковыми номерами.

Итак, следуя указанному плану, вычислим вначале форму p в точке y:

$$\mathrm{p}\left(y\right) = y^{>1} \cdot \mathrm{d}y^{>2} + 2 \cdot y^{>2} \cdot \mathrm{d}y^{>1} = 1 \cdot \mathrm{d}y^{>2} + 2 \cdot 2 \cdot \mathrm{d}y^{>1}.$$

И теперь вычислим искомое:

$$\mathrm{p}\left(y\right)\left(\mathrm{v}\right) = 1 \cdot \mathrm{d}y^{>2}\left(\mathrm{v}\right) + 2 \cdot 2 \cdot \mathrm{d}y^{>1}\left(\mathrm{v}\right) =$$
$$= 1 \cdot \mathrm{v}^{>2} + 2 \cdot 2 \cdot \mathrm{v}^{>1} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 16.$$

Ответ. Итак, $\mathrm{p}\left(y\right)\left(\mathrm{v}\right) = 16$. ⊠

Задание 2. Пусть на некотором двумерном многообразии задана дифференциальная форма p валентности 1, выраженная в локальных координатах по формуле

$$\mathrm{p}\left(x\right) = x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>2} + 2 \cdot x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>1},$$

а также задано векторное поле u с координатным выражением

$$\mathsf{u}^{>1}(x) = x^{>1} + x^{>2},$$
$$\mathsf{u}^{>2}(x) = x^{>1} - x^{>2};$$

вычислить координатное выражение гладкой функции $\mathsf{p} \blacktriangleleft \mathsf{u}$ — значения формы p на векторном поле u.

Решение. Вычисление сводится к определению значения кокасательного вектора $\mathsf{p}(x)$ на касательном векторе $\mathsf{u}(x)$ при произвольной точке x.

Вычислим:

$$\begin{aligned}(\mathsf{p} \blacktriangleleft \mathsf{u})(x) &= \mathsf{p}(x)(\mathsf{u}(x)) = \\ &= \mathsf{p}_{>1}(x) \cdot \mathsf{d}x^{>1}(\mathsf{u}(x)) + \mathsf{p}_{>2}(x) \cdot \mathsf{d}x^{>2}(\mathsf{u}(x)) = \\ &= \mathsf{p}_{>1}(x) \cdot \mathsf{u}^{>1}(x) + \mathsf{p}_{>2}(x) \cdot \mathsf{u}^{>2}(x) =;\end{aligned}$$

подставим координатные выражения формы p и векторного поля u:

$$= 2 \cdot x^{>2} \cdot (x^{>1} + x^{>2}) + x^{>1} \cdot (x^{>1} - x^{>2}) = (x^{>1})^2 + x^{>1} \cdot x^{>2} + 2 \cdot (x^{>2})^2.$$

Ответ. Итак, $(\mathsf{p} \blacktriangleleft \mathsf{u})(x) = (x^{>1})^2 + x^{>1} \cdot x^{>2} + 2 \cdot (x^{>2})^2$. ⊠

Задание 3. Пусть теперь задана дифференциальная форма q валентности 2 с координатным выражением

$$\mathsf{q}(x) = x^{>1} \cdot \mathsf{d}x^{>2} \wedge \mathsf{d}x^{>1},$$

и в точке y с координатами $y^{>1} = 1$ и $y^{>2} = 2$ заданы вектор v с координатами $v^{>1} = 3$, $v^{>2} = 4$ и вектор w с координатами $w^{>1} = 2$, $w^{>2} = 3$; вычислить значение $\mathsf{q}(y)(v, w)$ формы q в точке y на векторах v, w.

Решение. По указанному ранее плану вычислим вначале форму q в точке y:

$$\begin{aligned}\mathsf{q}(y) &= y^{>1} \cdot \mathsf{d}x^{>2} \wedge \mathsf{d}x^{>1} = 1 \cdot \mathsf{d}x^{>2} \wedge \mathsf{d}x^{>1} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\mathsf{d}x^{>2} \otimes \mathsf{d}x^{>1} - \mathsf{d}x^{>1} \otimes \mathsf{d}x^{>2}\right);\end{aligned}$$

и по определению тензорного произведения вычислим искомое значение, подставив координаты векторов:

$$\begin{aligned}\mathsf{q}(y)(v, w) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\mathsf{d}x^{>2} \otimes \mathsf{d}x^{>1} - \mathsf{d}x^{>1} \otimes \mathsf{d}x^{>2}\right)(v, w) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (v^{>2} \cdot w^{>1} - v^{>1} \cdot w^{>2}) = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 2 - 3 \cdot 3) = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ответ. Итак, $\mathrm{q}\left(y\right)\left(v, w\right) = -\frac{1}{2}$. ⊠

Задание 4. Вычислить значение $\mathrm{u} \lrcorner \mathrm{q}$ внутренней производной формы q валентности 2 с координатным выражением

$$\mathrm{q}\left(x\right) = x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>2} \wedge \mathrm{d}x^{>1}$$

определенным выше векторным полем u с координатным выражением

$$\begin{aligned} \mathrm{u}^{>1}\left(x\right) &= x^{>1} + x^{>2}, \\ \mathrm{u}^{>2}\left(x\right) &= x^{>1} - x^{>2}. \end{aligned}$$

Решение. Вычислим по линейности внутренней производной, подставляя координатное выражение формы q:

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{u} \lrcorner \mathrm{q}\right)\left(x\right) = \mathrm{u}\left(x\right) \lrcorner \left(x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>2} \wedge \mathrm{d}x^{>1}\right) &= \\ = \frac{1}{2} \cdot x^{>1} \cdot \mathrm{u}\left(x\right) \lrcorner \left(\mathrm{d}x^{>2} \otimes \mathrm{d}x^{>1} - \mathrm{d}x^{>1} \otimes \mathrm{d}x^{>2}\right) &= \\ = \frac{1}{2} \cdot x^{>1} \cdot \left(\mathrm{u}\left(x\right) \lrcorner \left(\mathrm{d}x^{>2} \otimes \mathrm{d}x^{>1}\right) - \mathrm{u}\left(x\right) \lrcorner \left(\mathrm{d}x^{>1} \otimes \mathrm{d}x^{>2}\right)\right) &=, \end{aligned}$$

по определению внутренней производной и тензорного произведения

$$\begin{aligned} = \frac{1}{2} \cdot x^{>1} \cdot \left(\left(\mathrm{d}x^{>2}\left(\mathrm{u}\left(x\right)\right) \cdot \mathrm{d}x^{>1}\right) - \left(\mathrm{d}x^{>1}\left(\mathrm{u}\left(x\right)\right) \cdot \mathrm{d}x^{>2}\right)\right) &= \\ = \frac{1}{2} \cdot x^{>1} \cdot \left(\left(\mathrm{u}^{>2}\left(x\right) \cdot \mathrm{d}x^{>1}\right) - \left(\mathrm{u}^{>1}\left(x\right) \cdot \mathrm{d}x^{>2}\right)\right) &=, \end{aligned}$$

подставив координатное выражение векторного поля u, упростим:

$$\begin{aligned} = \frac{1}{2} \cdot x^{>1} \cdot \left(\left(\left(x^{>1} + x^{>2}\right) \cdot \mathrm{d}x^{>1}\right) - \left(\left(x^{>1} - x^{>2}\right) \cdot \mathrm{d}x^{>2}\right)\right) &= \\ = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(x^{>1}\right)^2 + x^{>1} \cdot x^{>2}\right) \cdot \mathrm{d}x^{>1} + \frac{1}{2} \cdot \left(x^{>1} \cdot x^{>2} - \left(x^{>1}\right)^2\right) \cdot \mathrm{d}x^{>2}&. \end{aligned}$$

Ответ. Итак,

$$\left(\mathrm{u} \lrcorner \mathrm{q}\right)\left(x\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(x^{>1}\right)^2 + x^{>1} \cdot x^{>2}\right) \cdot \mathrm{d}x^{>1} + \frac{1}{2} \cdot \left(x^{>1} \cdot x^{>2} - \left(x^{>1}\right)^2\right) \cdot \mathrm{d}x^{>2}. \boxtimes$$

§ 15 Внешнее умножение

Задание 5. Пусть на некотором гладком многообразии заданы две дифференциальные формы

$$\begin{aligned} \mathrm{p}\left(x\right) &:= x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>2} + x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>1}, \\ \mathrm{q}\left(x\right) &:= \mathrm{d}x^{>1} + \mathrm{d}x^{>2}; \end{aligned}$$

вычислить их внешнее произведение.

Решение. Напомним, что внешнее произведение имеет следующие вычислительно полезные свойства:

- линейность, то есть $(a \cdot \mathsf{p} + b \cdot \mathsf{q}) \wedge \mathsf{r} = a \cdot (\mathsf{p} \wedge \mathsf{r}) + b \cdot (\mathsf{q} \wedge \mathsf{r})$, где a, b — числа;
- кососимметричность, то есть при перестановке двух сомножителей произведение меняет знак.

Вычислим по указанным свойствам:

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{p} \wedge \mathsf{q})(x) &= (x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>2} + x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>1}) \wedge (\mathrm{d}x^{>1} + \mathrm{d}x^{>2}) = \\
&= x^{>1} \cdot \overbrace{\mathrm{d}x^{>2} \wedge \mathrm{d}x^{>1}}^{= -\mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>2}} + x^{>2} \cdot \overbrace{\mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>1}}^{=0} + \\
&+ x^{>1} \cdot \overbrace{\mathrm{d}x^{>2} \wedge \mathrm{d}x^{>2}}^{=0} + x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>2} = \\
&= (-x^{>1} + x^{>2}) \cdot \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>2}.
\end{aligned}
$$

Ответ. Итак, $(\mathsf{p} \wedge \mathsf{q})(x) = (-x^{>1} + x^{>2}) \cdot \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>2}$. ⊠

Задание 6. Пусть заданы две дифференциальные формы

$$
\begin{aligned}
\mathsf{p}(x) &:= x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>2} + x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>1}, \\
\mathsf{r}(x) &:= \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>2} + \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>3};
\end{aligned}
$$

вычислить внешнее произведение $\mathsf{p} \wedge \mathsf{r}$.

Решение. Вычислим по тем же свойствам:

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{p} \wedge \mathsf{r})(x) &= (x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>2} + x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>1}) \wedge (\mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>2} + \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>3}) = \\
&= x^{>1} \cdot \overbrace{\mathrm{d}x^{>2} \wedge \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>2}}^{=0} + x^{>2} \cdot \overbrace{\mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>2}}^{=0} + \\
&+ x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>2} \wedge \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>3} + x^{>2} \cdot \overbrace{\mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>3}}^{=0} = \\
&= -x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>2} \wedge \mathrm{d}x^{>3}.
\end{aligned}
$$

Ответ. Итак, $(\mathsf{p} \wedge \mathsf{r})(x) = -x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>2} \wedge \mathrm{d}x^{>3}$. ⊠

Задание 7. Пусть заданы две дифференциальные формы

$$
\begin{aligned}
\mathsf{r}(x) &:= \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>2} + \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>3}, \\
\mathsf{s}(x) &:= \mathrm{d}x^{>4} \wedge \mathrm{d}x^{>2} + \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>3};
\end{aligned}
$$

вычислить внешнее произведение $\mathsf{r} \wedge \mathsf{s}$.

Решение. Вычислим:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{r}\wedge \mathrm{s})(x) &= (\mathrm{d}x^{>1}\wedge \mathrm{d}x^{>2}+\mathrm{d}x^{>1}\wedge \mathrm{d}x^{>3})\wedge(\mathrm{d}x^{>4}\wedge \mathrm{d}x^{>2}+\mathrm{d}x^{>1}\wedge \mathrm{d}x^{>3}) = \\
&= \mathrm{d}x^{>1}\wedge \mathrm{d}x^{>2}\wedge \mathrm{d}x^{>4}\wedge \mathrm{d}x^{>2}+\mathrm{d}x^{>1}\wedge \mathrm{d}x^{>3}\wedge \mathrm{d}x^{>4}\wedge \mathrm{d}x^{>2}+ \\
&+ \mathrm{d}x^{>1}\wedge \mathrm{d}x^{>2}\wedge \mathrm{d}x^{>1}\wedge \mathrm{d}x^{>3}+\mathrm{d}x^{>1}\wedge \mathrm{d}x^{>3}\wedge \mathrm{d}x^{>1}\wedge \mathrm{d}x^{>3} = \\
&= \mathrm{d}x^{>1}\wedge \mathrm{d}x^{>2}\wedge \mathrm{d}x^{>3}\wedge \mathrm{d}x^{>4}.
\end{aligned}
$$

Ответ. Итак, $(\mathrm{r}\wedge \mathrm{s})(x) = \mathrm{d}x^{>1}\wedge \mathrm{d}x^{>2}\wedge \mathrm{d}x^{>3}\wedge \mathrm{d}x^{>4}$. ⊠

§ 16 Дифференцирование

Задание 8. Пусть на некотором гладком многообразии в локальных координатах задана дифференциальная форма

$$\mathrm{p}(x) := x^{>1}\cdot \mathrm{d}x^{>2} + x^{>2}\cdot \mathrm{d}x^{>1};$$

вычислить дифференциал dp этой формы.

Решение. Напомним, что дифференциал линеен относительно умножения на число, подчиняется правилу Лейбница при умножении на числовую функцию (то есть $\mathrm{d}(\mathrm{f}\cdot\mathrm{p}) = \mathrm{df}\wedge\mathrm{p}+\mathrm{f}\cdot\mathrm{dp}$), а дифференциал внешнего произведения дифференциалов координат равен нулю.

Вычислим по указанным свойствам:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dp}(x) &= \mathrm{d}(x^{>1}\cdot \mathrm{d}x^{>2} + x^{>2}\cdot \mathrm{d}x^{>1}) = \\
&= \mathrm{d}x^{>1}\wedge \mathrm{d}x^{>2} + x^{>1}\cdot \overbrace{\mathrm{dd}x^{>2}}^{=0} + \overbrace{\mathrm{d}x^{>2}\wedge \mathrm{d}x^{>1}}^{=-\mathrm{d}x^{>1}\wedge \mathrm{d}x^{>2}} + x^{>2}\cdot \overbrace{\mathrm{dd}x^{>1}}^{=0} = 0.
\end{aligned}
$$

Ответ. Итак, $\mathrm{dp}(x) = 0$. ⊠

Задание 9. Пусть в локальных координатах задана дифференциальная форма

$$\mathrm{q}(x) := (x^{>1})^2\cdot \mathrm{d}x^{>2} + x^{>2}\cdot \mathrm{d}x^{>1};$$

вычислить ее дифференциал dq.

Решение. Вычислим по тем же правилам:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dq}(x) &= \mathrm{d}((x^{>1})^2\cdot \mathrm{d}x^{>2} + x^{>2}\cdot \mathrm{d}x^{>1}) = \\
&= 2\cdot x^{>1}\cdot \mathrm{d}x^{>1}\wedge \mathrm{d}x^{>2} + (x^{>1})^2\cdot \overbrace{\mathrm{dd}x^{>2}}^{=0} + \overbrace{\mathrm{d}x^{>2}\wedge \mathrm{d}x^{>1}}^{=-\mathrm{d}x^{>1}\wedge \mathrm{d}x^{>2}} + x^{>2}\cdot \overbrace{\mathrm{dd}x^{>1}}^{=0} = \\
&= (2\cdot x^{>1} - 1)\cdot \mathrm{d}x^{>1}\wedge \mathrm{d}x^{>2}.
\end{aligned}
$$

Ответ. Итак, $\mathsf{dq}(x) = (2 \cdot x^{>1} - 1) \cdot \mathsf{d}x^{>1} \wedge \mathsf{d}x^{>2}$. ⊠

Задание 10. Пусть в локальных координатах задана дифференциальная форма

$$\mathsf{r}(x) := x^{>1} \cdot \mathsf{d}x^{>1} \wedge \mathsf{d}x^{>2} + x^{>2} \cdot \mathsf{d}x^{>1} \wedge \mathsf{d}x^{>3};$$

вычислить ее дифференциал dr.

Решение. Вычислим:

$$\begin{aligned}
\mathsf{dr}(x) &= \mathsf{d}(x^{>1} \cdot \mathsf{d}x^{>1} \wedge \mathsf{d}x^{>2} + x^{>2} \cdot \mathsf{d}x^{>1} \wedge \mathsf{d}x^{>3}) = \\
&= \overbrace{\mathsf{d}x^{>1} \wedge \mathsf{d}x^{>1} \wedge \mathsf{d}x^{>2}}^{=0} + x^{>1} \cdot \overbrace{\mathsf{d}(\mathsf{d}x^{>1} \wedge \mathsf{d}x^{>2})}^{=0} + \\
&\quad + \mathsf{d}x^{>2} \wedge \mathsf{d}x^{>1} \wedge \mathsf{d}x^{>3} + x^{>2} \cdot \overbrace{\mathsf{d}(\mathsf{d}x^{>1} \wedge \mathsf{d}x^{>3})}^{=0} = \\
&= -\mathsf{d}x^{>1} \wedge \mathsf{d}x^{>2} \wedge \mathsf{d}x^{>3}.
\end{aligned}$$

Ответ. Итак, $\mathsf{dr}(x) = -\mathsf{d}x^{>1} \wedge \mathsf{d}x^{>2} \wedge \mathsf{d}x^{>3}$. ⊠

4.2. Производная Ли

§ 17 Вычисление производной Ли

В этом разделе предполагается, что на некотором трехмерном многообразии задано векторное поле j с координатным выражением

$$\begin{aligned}
\mathsf{j}^{>1}(x) &= x^{>2} + x^{>3}, \\
\mathsf{j}^{>2}(x) &= x^{>1} + x^{>3}, \\
\mathsf{j}^{>3}(x) &= x^{>1} + x^{>2}.
\end{aligned}$$

Задание 11. Пусть задана функция

$$\mathrm{f}(x) = x^{>1} \cdot x^{>2} + x^{>3};$$

вычислить ее производную Ли полем j.

Решение. Напомним, что производная Ли гладкой функции векторным полем есть ее производная этим полем, и вычисляется в локальных координатах она как сумма по всем номерам координат произведений значения координаты поля и значения частной производной этой функции.

Вычислим по указанному правилу:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{L}_{\mathrm{j}}\,\mathrm{f})(x) = (\mathrm{j} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \mathrm{f})(x) = \mathrm{j}^{>\alpha}(x)\cdot\partial_{>\alpha}\mathrm{f}(x) = \\
&= (x^{>2}+x^{>3})\cdot\partial_{>1}(x^{>1}\cdot x^{>2}+x^{>3}) + \\
&\qquad + (x^{>1}+x^{>3})\cdot\partial_{>2}(x^{>1}\cdot x^{>2}+x^{>3}) + \\
&\qquad\qquad + (x^{>1}+x^{>2})\cdot\partial_{>3}(x^{>1}\cdot x^{>2}+x^{>3}) = \\
&= (x^{>2}+x^{>3})\cdot(x^{>2}) + (x^{>1}+x^{>3})\cdot(x^{>1}) + (x^{>1}+x^{>2})\cdot(1) = \\
&\qquad = x^{>1}+x^{>2}+(x^{>1})^2+(x^{>2})^2+x^{>1}\cdot x^{>3}+x^{>2}\cdot x^{>3}.
\end{aligned}
$$

Ответ. Итак, $(\mathcal{L}_{\mathrm{j}}\,\mathrm{f})(x) = x^{>1}+x^{>2}+(x^{>1})^2+(x^{>2})^2+x^{>1}\cdot x^{>3}+x^{>2}\cdot x^{>3}$. ⊠

Задание 12. Пусть задано векторное поле v с координатами

$$
\mathrm{v}^{>1}(x) = x^{>2}, \quad \mathrm{v}^{>2}(x) = x^{>3}, \quad \mathrm{v}^{>3}(x) = x^{>1};
$$

вычислить его производную Ли полем j.

Решение. Напомним, что производная Ли векторного поля другим векторным полем есть их коммутатор (скобка Ли или скобка Пуассона); а вычисляется он в локальных координатах по формуле

$$
[\![\mathrm{j},\mathrm{v}]\!]^{>\alpha}(x) = \mathrm{j}^{>\beta}(x)\cdot\partial_{>\beta}\mathrm{v}^{>\alpha}(x) - \mathrm{v}^{>\beta}(x)\cdot\partial_{>\beta}\mathrm{j}^{>\alpha}(x).
$$

Вычислим первую координату:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{L}_{\mathrm{j}}\mathrm{v})^{>1}(x) = [\![\mathrm{j},\mathrm{v}]\!]^{>1}(x) = \mathrm{j}^{>\alpha}(x)\cdot\partial_{>\alpha}\mathrm{v}^{>1}(x) - \mathrm{v}^{>\alpha}(x)\cdot\partial_{>\alpha}\mathrm{j}^{>1}(x) = \\
&\quad = (x^{>2}+x^{>3})\cdot\partial_{>1}(x^{>2}) + (x^{>1}+x^{>3})\cdot\partial_{>2}(x^{>2}) + (x^{>1}+x^{>2})\cdot\partial_{>3}(x^{>2}) - \\
&\quad - (x^{>2})\cdot\partial_{>1}(x^{>2}+x^{>3}) - (x^{>3})\cdot\partial_{>2}(x^{>2}+x^{>3}) - (x^{>1})\cdot\partial_{>3}(x^{>2}+x^{>3}) = \\
&\qquad = (x^{>2}+x^{>3})\cdot 0 + (x^{>1}+x^{>3})\cdot 1 + (x^{>1}+x^{>2})\cdot 0 - \\
&\qquad\qquad - (x^{>2})\cdot 0 - (x^{>3})\cdot 1 - (x^{>1})\cdot 1 = 0.
\end{aligned}
$$

Аналогичные вычисления второй и третьей координат искомой производной показывают, что они также нулевые.

Ответ. Итак, $\mathcal{L}_{\mathrm{j}}\mathrm{v} = 0$. ⊠

Задание 13. Пусть задана дифференциальная форма p с координатным выражением

$$
\mathrm{p}(x) = x^{>2}\cdot \mathrm{d}x^{>3};
$$

вычислить ее производную Ли полем j.

Решение. Напомним, что производная Ли дифференциальной формы p векторным полем j в локальных координатах вычисляется по формуле

$$\left(\mathcal{L}_{\mathsf{j}}\,\mathsf{p}\right)_{>\alpha}(x) = \mathsf{j}^{>\beta}(x)\cdot\partial_{>\beta}\,\mathsf{p}_{>\alpha}(x) + \mathsf{p}_{>\beta}(x)\cdot\partial_{>\alpha}\,\mathsf{j}^{>\beta}(x).$$

Вычислим первую координату искомой производной, заметив, что $\mathsf{p}_{>1}(x) = 0$, $\mathsf{p}_{>2}(x) = 0$, $\mathsf{p}_{>3}(x) = x^{>2}$:

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{L}_{\mathsf{j}}\,\mathsf{p}\right)_{>1}(x) &= \mathsf{j}^{>\alpha}(x)\cdot\partial_{>\alpha}\,\mathsf{p}_{>1}(x) + \mathsf{p}_{>\alpha}(x)\cdot\partial_{>1}\,\mathsf{j}^{>\alpha}(x) = \\ &= 0 + \mathsf{p}_{>1}(x)\cdot\partial_{>1}\,\mathsf{j}^{>1}(x) + \mathsf{p}_{>2}(x)\cdot\partial_{>1}\,\mathsf{j}^{>2}(x) + \mathsf{p}_{>3}(x)\cdot\partial_{>1}\,\mathsf{j}^{>3}(x) = \\ &= \mathsf{p}_{>3}(x)\cdot\partial_{>1}\,\mathsf{j}^{>3}(x) = x^{>2}\cdot\partial_{>1}\left(x^{>1} + x^{>2}\right) = x^{>2}.\end{aligned}$$

Аналогичные вычисления второй и третьей координат искомой производной показывают, что $\left(\mathcal{L}_{\mathsf{j}}\,\mathsf{p}\right)_{>2}(x) = x^{>2}$, $\left(\mathcal{L}_{\mathsf{j}}\,\mathsf{p}\right)_{>3}(x) = x^{>1} + x^{>3}$.

Ответ. Итак, $\mathcal{L}_{\mathsf{j}}\,\mathsf{p} = x^{>2}\cdot\mathsf{d}x^{>1} + x^{>2}\cdot\mathsf{d}x^{>2} + \left(x^{>1} + x^{>3}\right)\cdot\mathsf{d}x^{>3}$. ⊠

Задание 14. Пусть задана дифференциальная форма q с координатным выражением

$$\mathsf{q}(x) = x^{>1}\cdot\mathsf{d}x^{>2}\wedge\mathsf{d}x^{>3};$$

вычислить ее производную Ли полем j.

Решение. Напомним, что производная Ли подпадает под действие правила Лейбница относительно тензорного умножения, а значит и относительно внешнего умножения и умножения на гладкую функцию; а также она перестановочна с внешним дифференцированием форм.

Вычислим по этим свойствам:

$$\left(\mathcal{L}_{\mathsf{j}}\,\mathsf{q}\right)(x) = \mathcal{L}_{\mathsf{j}}\left(x^{>1}\cdot\mathsf{d}x^{>2}\wedge\mathsf{d}x^{>3}\right) =,$$

по правилу Лейбница для тензорного произведения:

$$= \left(\mathcal{L}_{\mathsf{j}}\,x^{>1}\right)\cdot\mathsf{d}x^{>2}\wedge\mathsf{d}x^{>3} + x^{>1}\cdot\mathcal{L}_{\mathsf{j}}\left(\mathsf{d}x^{>2}\wedge\mathsf{d}x^{>3}\right) =$$

по правилу Лейбница для внешнего произведения:

$$= \left(x^{>2} + x^{>3}\right)\cdot\mathsf{d}x^{>2}\wedge\mathsf{d}x^{>3} + x^{>1}\cdot\left(\mathcal{L}_{\mathsf{j}}\,\mathsf{d}x^{>2}\right)\wedge\mathsf{d}x^{>3} + x^{>1}\cdot\mathsf{d}x^{>2}\wedge\left(\mathcal{L}_{\mathsf{j}}\,\mathsf{d}x^{>3}\right) =$$

по перестановочности внешнего дифференцирования и производной Ли:

$$= \left(x^{>2} + x^{>3}\right)\cdot\mathsf{d}x^{>2}\wedge\mathsf{d}x^{>3} + x^{>1}\cdot\mathsf{d}\left(\mathcal{L}_{\mathsf{j}}\,x^{>2}\right)\wedge\mathsf{d}x^{>3} + x^{>1}\cdot\mathsf{d}x^{>2}\wedge\mathsf{d}\left(\mathcal{L}_{\mathsf{j}}\,x^{>3}\right) =,$$

вычислив производные Ли, получим

$$= \left(x^{>2} + x^{>3}\right) \cdot \mathrm{d}x^{>2} \wedge \mathrm{d}x^{>3} + x^{>1} \cdot \left(\mathrm{d}x^{>1} + \mathrm{d}x^{>3}\right) \wedge \mathrm{d}x^{>3} + x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>2} \wedge \left(\mathrm{d}x^{>1} + \mathrm{d}x^{>2}\right) =$$

по кососимметричности внешнего произведения (после раскрытия скобок):

$$= \left(x^{>2} + x^{>3}\right) \cdot \mathrm{d}x^{>2} \wedge \mathrm{d}x^{>3} + x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>3} + x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>2} \wedge \mathrm{d}x^{>1} =,$$

упорядочив, получим

$$= \left(x^{>2} + x^{>3}\right) \cdot \mathrm{d}x^{>2} \wedge \mathrm{d}x^{>3} - x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>3} \wedge \mathrm{d}x^{>1} - x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>2}.$$

Ответ. Итак,

$$\left(\mathcal{L}_{\mathrm{j}}\,\mathrm{q}\right)(x) = \left(x^{>2} + x^{>3}\right) \cdot \mathrm{d}x^{>2} \wedge \mathrm{d}x^{>3} - x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>3} \wedge \mathrm{d}x^{>1} - x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>2}. \boxtimes$$

§ 18 Инфинитезимальная формула Стокса

Задание 15. Пусть на некотором двумерном гладком многообразии в локальных координатах задана дифференциальная форма

$$\mathrm{q}\,(x) := (x^{>1})^2 \cdot \mathrm{d}x^{>2} + x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>1},$$

и векторные поля

$$\mathrm{u}^{>1}(x) := x^{>1}, \quad \mathrm{u}^{>2}(x) := x^{>1} + x^{>2},$$
$$\mathrm{v}^{>1}(x) := x^{>2}, \quad \mathrm{v}^{>2}(x) := x^{>1} + x^{>2};$$

вычислить значение $\mathrm{dq} \blacktriangleleft (\mathrm{u}, \mathrm{v})$ формы dq на векторных полях u и v непосредственно и по инфинитезимальной формуле Стокса, сравнив после результаты.

Решение. Вычислим вначале непосредственно, воспользовавшись вычисленным дифференциалом этой формы ($\mathrm{dq}\,(x) = (2 \cdot x^{>1} - 1) \cdot \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>2}$, см. Задание 9):

$$\left(\mathrm{dq} \blacktriangleleft (\mathrm{u}, \mathrm{v})\right)(x) = \left((2 \cdot x^{>1} - 1) \cdot \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>2}\right)\left(\mathrm{u}\,(x), \mathrm{v}\,(x)\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot x^{>1} - 1) \cdot \left(\mathrm{d}x^{>1} \otimes \mathrm{d}x^{>2} - \mathrm{d}x^{>2} \otimes \mathrm{d}x^{>1}\right)\left(\mathrm{u}\,(x), \mathrm{v}\,(x)\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot x^{>1} - 1) \cdot \left(\mathrm{d}x^{>1}(\mathrm{u}\,(x)) \cdot \mathrm{d}x^{>2}(\mathrm{v}\,(x)) - \mathrm{d}x^{>2}(\mathrm{u}\,(x)) \cdot \mathrm{d}x^{>1}(\mathrm{v}\,(x))\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot x^{>1} - 1) \cdot \left(\mathrm{u}^{>1}(x) \cdot \mathrm{v}^{>2}(x) - \mathrm{u}^{>2}(x) \cdot \mathrm{v}^{>1}(x)\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot x^{>1} - 1) \cdot \left(x^{>1} \cdot (x^{>1} + x^{>2}) - (x^{>1} + x^{>2}) \cdot x^{>2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot x^{>1} - 1) \cdot \left((x^{>1})^2 - (x^{>2})^2\right).$$

Теперь же вычислим значение $\mathrm{q} \blacktriangleleft \mathrm{v}$ формы q на векторном поле v:

$$
\begin{aligned}
\big(\mathrm{q} \blacktriangleleft \mathrm{v}\big)(x) &= \big((x^{>1})^2 \cdot \mathrm{d}x^{>2} + x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>1}\big)(\mathrm{v}(x)) = \\
&= (x^{>1})^2 \cdot \mathrm{d}x^{>2}(\mathrm{v}(x)) + x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>1}(\mathrm{v}(x)) = \\
&= (x^{>1})^2 \cdot \mathrm{v}^{>2}(x) + x^{>2} \cdot \mathrm{v}^{>1}(x) = \\
&= (x^{>1})^2 \cdot (x^{>1} + x^{>2}) + x^{>2} \cdot x^{>2};
\end{aligned}
$$

из чего вычислим производную $\mathrm{u} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} (\mathrm{q} \blacktriangleleft \mathrm{v})$ полученной функции полем u:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{u} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} (\mathrm{dq} \blacktriangleleft \mathrm{v})(x) &= \mathrm{u}^{>1}(x) \cdot \partial_{>1}(\mathrm{q} \blacktriangleleft \mathrm{v})(x) + \mathrm{u}^{>2}(x) \cdot \partial_{>2}(\mathrm{q} \blacktriangleleft \mathrm{v})(x) = \\
&= x^{>1} \cdot \partial_{>1}\big((x^{>1})^3 + (x^{>1})^2 \cdot x^{>2} + (x^{>2})^2\big) + \\
&+ (x^{>1} + x^{>2}) \cdot \partial_{>2}\big((x^{>1})^3 + (x^{>1})^2 \cdot x^{>2} + (x^{>2})^2\big) = \\
&= x^{>1} \cdot (3 \cdot (x^{>1})^2 + 2 \cdot x^{>1} \cdot x^{>2}) + (x^{>1} + x^{>2}) \cdot ((x^{>1})^2 + 2 \cdot x^{>2}) = \\
&= 2 \cdot x^{>1} \cdot x^{>2} + 2 \cdot (x^{>2})^2 + 4 \cdot (x^{>1})^3 + 3 \cdot (x^{>1})^2 \cdot x^{>2}.
\end{aligned}
$$

Затем вычислим $\mathrm{q} \blacktriangleleft \mathrm{u}$:

$$
\begin{aligned}
\big(\mathrm{q} \blacktriangleleft \mathrm{u}\big)(x) &= \big((x^{>1})^2 \cdot \mathrm{d}x^{>2} + x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>1}\big)(\mathrm{u}(x)) = \\
&= (x^{>1})^2 \cdot \mathrm{d}x^{>2}(\mathrm{u}(x)) + x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>1}(\mathrm{u}(x)) = \\
&= (x^{>1})^2 \cdot \mathrm{u}^{>2}(x) + x^{>2} \cdot \mathrm{u}^{>1}(x) = \\
&= (x^{>1})^3 + (x^{>1})^2 \cdot x^{>2} + x^{>1} \cdot x^{>2};
\end{aligned}
$$

из чего вычислим $\mathrm{d}(\mathrm{q} \blacktriangleleft \mathrm{u})$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{q} \blacktriangleleft \mathrm{u})(x) &= \mathrm{d}((x^{>1})^3 + (x^{>1})^2 \cdot x^{>2} + x^{>1} \cdot x^{>2}) = \\
&= 3 \cdot (x^{>1})^2 \cdot \mathrm{d}x^{>1} + x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>2} + x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>1} + 2 \cdot x^{>1} \cdot x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>1} + (x^{>1})^2 \cdot \mathrm{d}x^{>2};
\end{aligned}
$$

и отсюда вычислим $\mathrm{d}(\mathrm{q} \blacktriangleleft \mathrm{u}) \blacktriangleleft \mathrm{v}$:

$$
\begin{aligned}
\big(\mathrm{d}(\mathrm{q} \blacktriangleleft \mathrm{u}) \blacktriangleleft \mathrm{v}\big)(x) &= \big(3 \cdot (x^{>1})^2 \cdot \mathrm{d}x^{>1} + x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>2} + \\
&+ x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>1} + 2 \cdot x^{>1} \cdot x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>1} + (x^{>1})^2 \cdot \mathrm{d}x^{>2}\big)(\mathrm{v}(x)) = \\
&= (x^{>1})^2 + x^{>1} \cdot x^{>2} + (x^{>2})^2 + (x^{>1})^3 + 4 \cdot (x^{>1})^2 \cdot x^{>2} + 2 \cdot x^{>1} \cdot (x^{>2})^2.
\end{aligned}
$$

Далее нетрудно установить, что

$$
[\![\mathrm{u}, \mathrm{v}]\!]^{>1}(x) = x^{>1}, \quad [\![\mathrm{u}, \mathrm{v}]\!]^{>2}(x) = x^{>1} - x^{>2};
$$

из чего следует

$$\big(\mathrm{q} \blacktriangleleft [\![\mathrm{u},\mathrm{v}]\!]\big)(x) = (x^{>1})^3 - (x^{>1})^2 \cdot x^{>2} + x^{>1} \cdot x^{>2}.$$

Ответ. Итак, сложив полученные выражения по формуле:

$$\mathrm{u} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright}(\mathrm{q} \blacktriangleleft \mathrm{v}) - \mathrm{d}(\mathrm{q} \blacktriangleleft \mathrm{u}) \blacktriangleleft \mathrm{v} - \mathrm{q} \blacktriangleleft [\![\mathrm{u},\mathrm{v}]\!],$$

получим $2 \cdot \mathrm{dq} \blacktriangleleft (\mathrm{u},\mathrm{v})$. ⊠

4.3. Теорема Фробениуса

§ 19 Одномерное распределение в трехмерном пространстве

Задание 16. Пусть в трехмерном многообразии на окрестности его точки y с координатами $y^{>1} = y^{>2} = y^{>3} = 0$ задано распределение с базисом из одного векторного поля v_1, координатное выражение которого есть

$$\mathrm{v}_1^{>1}(x) = x^{>1}, \quad \mathrm{v}_1^{>2}(x) = x^{>2}, \quad \mathrm{v}_1^{>3}(x) = x^{>3} + 1;$$

используя метод доказательства Теоремы Фробениуса к заданному распределению построить функции из определения вполне интегрируемости.

Решение. Заметив, что коммутатор векторного поля v_1 с ним самим есть нуль, заключим по Лемме 14, что распределение инволютивно; поэтому искомые функции существуют.

Дополним систему $\{\mathrm{v}_1\}$ до размерности 3 векторными полями v_2 и v_3 с координатными выражениями

$$\mathrm{v}_2^{>1}(x) = 1, \quad \mathrm{v}_2^{>2}(x) = 0, \quad \mathrm{v}_2^{>3}(x) = 0;$$
$$\mathrm{v}_3^{>1}(x) = 0, \quad \mathrm{v}_3^{>2}(x) = 1, \quad \mathrm{v}_3^{>3}(x) = 0;$$

и заметим, что в окрестности точки y эти три поля линейно независимы.

Решив для этих полей определяющие уравнения (1), запишем координатные выражения их потоков $\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{k}_3$:

$$\mathrm{k}_1(t,x) : \begin{pmatrix} x^{>1} \cdot e^t \\ x^{>2} \cdot e^t \\ (x^{>3}+1) \cdot e^t - 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{k}_2(t,x) : \begin{pmatrix} t + x^{>1} \\ x^{>2} \\ x^{>3} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{k}_3(t,x) : \begin{pmatrix} x^{>1} \\ t + x^{>2} \\ x^{>3} \end{pmatrix}.$$

Для начальной точки y и параметров $t^1, t^2, t^3 \longrightarrow 0$ построим отображение

$\mathtt{m}\left(t^1, t^2, t^3\right) = \mathtt{k}_1\left(t^1, \cdot\right) \circ \mathtt{k}_2\left(t^2, \cdot\right) \circ \mathtt{k}_3\left(t^3, \cdot\right)(y)$ (то есть по формуле Леммы 11)

с координатным выражением

$$\mathtt{m}\left(t^1, t^2, t^3\right) : \begin{pmatrix} t^2 \cdot e^{t^1} \\ t^3 \cdot e^{t^1} \\ e^{t^1} - 1 \end{pmatrix};$$

и выразим зависимость параметров $t^1, t^2, t^3 \longrightarrow 0$ от значений $\mathtt{m}\left(t^1, t^2, t^3\right) = x$ отображения $\mathtt{m}$:

$$t^1 = \mathrm{g}^1(x) = \ln\left(1 + x^{>1}\right), \quad t^2 = \mathrm{g}^2(x) = \frac{x^{>1}}{1 + x^{>3}}, \quad t^3 = \mathrm{g}^3(x) = \frac{x^{>2}}{1 + x^{>3}}.$$

Проверим, что дифференциал $\mathsf{d}\mathrm{g}^2$ обнулится на поле v_1:

$$\mathsf{d}\mathrm{g}^2(x) = \frac{1}{(1 + x^{>3})^2} \cdot \left(\left(1 + x^{>3}\right) \cdot \mathsf{d}x^{>1} - x^{>1} \cdot \mathsf{d}x^{>3}\right), \text{ следовательно}$$

$$\mathsf{d}\mathrm{g}^2(x)\left(\mathsf{v}_1(x)\right) = \frac{1}{(1 + x^{>3})^2} \cdot \left(\left(1 + x^{>3}\right) \cdot \mathsf{v}_1^{>1}(x) - x^{>1} \cdot \mathsf{v}_1^{>3}(x)\right) =$$

$$= \frac{1}{(1 + x^{>3})^2} \cdot \left(\left(1 + x^{>3}\right) \cdot x^{>1} - x^{>1} \cdot \left(x^{>3} + 1\right)\right) = 0,$$

а дифференциал $\mathsf{d}\mathrm{g}^3$ ведет себя так же.

Наконец заметим, что дифференциалы $\mathsf{d}\mathrm{g}^2$ и $\mathsf{d}\mathrm{g}^3$ линейно независимы, ибо различаются номера координат, дифференциалы которых участвуют в них; заключим из этого, что функция g^3 соответствует условиям Задания.

Ответ. В качестве искомых функций могут быть избраны построенные функции

$$\mathrm{g}^2(x) = \frac{x^{>1}}{1 + x^{>3}}, \quad \mathrm{g}^3(x) = \frac{x^{>2}}{1 + x^{>3}}. \boxtimes$$

§ 20 Двумерное распределение в трехмерном пространстве

Задание 17. Пусть в трехмерном многообразии на окрестности его точки y с координатами $y^{>1} = y^{>2} = y^{>3} = 0$ задано распределение с базисом из двух векторных полей v_1 и v_2, координатное выражение которых есть

$$\mathsf{v}_1 : \begin{pmatrix} 2 \cdot x^{>3} - 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{v}_2 : \begin{pmatrix} -x^{>1} \\ -2 \cdot x^{>2} \\ x^{>3} - 1 \end{pmatrix};$$

используя метод доказательства Теоремы Фробениуса к заданному распределению построить функцию из определения вполне интегрируемости.

Решение. Установим инволютивность распределения, вычислив коммутатор полей его базиса (матрично запишем формулу $[\![\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2]\!]^{>\alpha} = \mathrm{v}_1^{>\beta} \cdot \partial_{>\beta} \mathrm{v}_2^{>\alpha} - \mathrm{v}_2^{>\beta} \cdot \partial_{>\beta} \mathrm{v}_1^{>\alpha}$):

$$\begin{pmatrix} [\![\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2]\!]^{>1} \\ [\![\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2]\!]^{>2} \\ [\![\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2]\!]^{>3} \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} \partial_{>1} \mathrm{v}_2^{>1} & \partial_{>2} \mathrm{v}_2^{>1} & \partial_{>3} \mathrm{v}_2^{>1} \\ \partial_{>1} \mathrm{v}_2^{>2} & \partial_{>2} \mathrm{v}_2^{>2} & \partial_{>3} \mathrm{v}_2^{>2} \\ \partial_{>1} \mathrm{v}_2^{>3} & \partial_{>2} \mathrm{v}_2^{>3} & \partial_{>3} \mathrm{v}_2^{>3} \end{pmatrix}(x) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{v}_1^{>1} \\ \mathrm{v}_1^{>2} \\ \mathrm{v}_1^{>3} \end{pmatrix}(x) -$$

$$- \begin{pmatrix} \partial_{>1} \mathrm{v}_1^{>1} & \partial_{>2} \mathrm{v}_1^{>1} & \partial_{>3} \mathrm{v}_1^{>1} \\ \partial_{>1} \mathrm{v}_1^{>2} & \partial_{>2} \mathrm{v}_1^{>2} & \partial_{>3} \mathrm{v}_1^{>2} \\ \partial_{>1} \mathrm{v}_1^{>3} & \partial_{>2} \mathrm{v}_1^{>3} & \partial_{>3} \mathrm{v}_1^{>3} \end{pmatrix}(x) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{v}_2^{>1} \\ \mathrm{v}_2^{>2} \\ \mathrm{v}_2^{>3} \end{pmatrix}(x) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot x^{>3} - 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x^{>1} \\ -2 \cdot x^{>2} \\ x^{>3} - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot x^{>3} + 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \cdot x^{>3} - 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot x^{>3} + 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

ясно, что $[\![\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2]\!] = -2 \cdot \mathrm{v}_1$; тем самым распределение инволютивно.

Дополним систему $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$ векторным полем v_3 с координатным выражением

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

и заметим, что в окрестности точки y эти три поля линейно независимы.

Решив для этих полей определяющие уравнения (1), запишем координатные выражения их потоков $\mathtt{k}_1, \mathtt{k}_2, \mathtt{k}_3$:

$$\mathtt{k}_1(t, x) : \begin{pmatrix} 2 \cdot (x^{>3} - 1) \cdot t + x^{>1} \\ -t + x^{>2} \\ x^{>3} \end{pmatrix},$$

$$\mathtt{k}_2(t, x) : \begin{pmatrix} x^{>1} \cdot e^{-t} \\ x^{>2} \cdot e^{-2 \cdot t} \\ (x^{>3} - 1) \cdot e^{t} + 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathtt{k}_3(t, x) : \begin{pmatrix} x^{>1} \\ t + x^{>2} \\ x^{>3} \end{pmatrix}.$$

Для начальной точки y и параметров $t^1, t^2, t^3 \longrightarrow 0$ по формуле Леммы 11 построим отображение m с координатным выражением

$$\mathrm{m}\left(t^1, t^2, t^3\right) : \begin{pmatrix} -2 \cdot t^1 \cdot e^{t^2} \\ -t^1 + t^3 \cdot e^{-2 \cdot t^2} \\ 1 - e^{t^2} \end{pmatrix};$$

и выразим зависимость параметров $t^1, t^2, t^3 \longrightarrow 0$ от значений $\mathrm{m}\left(t^1, t^2, t^3\right) = x$ отображения m:

$$t^1 = \mathrm{g}^1\left(x\right) = \frac{x^{>1}}{2 \cdot \left(x^{>3} - 1\right)}, \quad t^2 = \mathrm{g}^2\left(x\right) = \ln(1 - x^{>3}),$$
$$t^3 = \mathrm{g}^3\left(x\right) = x^{>2} \cdot (x^{>3} - 1)^2 + \frac{1}{2} \cdot x^{>1} \cdot (x^{>3} - 1).$$

Запишем дифференциал $\mathrm{d}\mathrm{g}^3$:

$$\mathrm{d}\mathrm{g}^3\left(x\right) = \frac{1}{2} \cdot (x^{>3} - 1) \cdot \mathrm{d}x^{>1} + (x^{>3} - 1)^2 \cdot \mathrm{d}x^{>2} + \\ + \left(2 \cdot (x^{>3} - 1) \cdot x^{>2} + \frac{1}{2} \cdot x^{>1}\right) \cdot \mathrm{d}x^{>3}.$$

Вычислим значение этого дифференциала на поле v_1:

$$\mathrm{d}\mathrm{g}^3\left(x\right)\left(\mathrm{v}_1\left(x\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot (x^{>3} - 1) \cdot (2 \cdot x^{>3} - 2) + (x^{>3} - 1)^2 \cdot (-1) + \\ + \left(2 \cdot (x^{>3} - 1) \cdot x^{>2} + \frac{1}{2} \cdot x^{>1}\right) \cdot 0 = 0;$$

и аналогично на поле v_2.

Из неравенства $\mathrm{d}\mathrm{g}^3\left(y\right) \neq 0$ следует, что функция g^3 соответствует условиям Задания.

Ответ. В качестве искомой функции может быть избрана построенная функция

$$\mathrm{g}^3\left(x\right) = x^{>2} \cdot (x^{>3} - 1)^2 + \frac{1}{2} \cdot x^{>1} \cdot (x^{>3} - 1). \boxtimes$$

5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Дифференциальные формы

§ 21 Вычисление значений

Задание 18. Пусть на некотором двумерном многообразии задана дифференциальная форма p валентности 1, выраженная в локальных координатах по формуле

$$\mathsf{p}\left(x\right) = \left(x^{>2}\right)^{2} \cdot \mathrm{d}x^{>2} - \cdot x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>1},$$

а в точке y с координатами $y^{>1} = 4$ и $y^{>2} = -4$ задан вектор v с координатами $v^{>1} = -10$ и $v^{>2} = 1$; вычислить значение $\mathsf{p}\left(y\right)\left(v\right)$ дифференциальной формы p в точке y на касательном векторе v в той же точке.

Задание 19. Пусть на некотором двумерном многообразии задана дифференциальная форма p валентности 1, выраженная в локальных координатах по формуле

$$\mathsf{p}\left(x\right) = x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>2} - \cdot x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>1},$$

а также задано векторное поле u с координатным выражением

$$\mathsf{u}^{>1}\left(x\right) = x^{>1} + 5 \cdot x^{>2},$$
$$\mathsf{u}^{>2}\left(x\right) = 5 \cdot x^{>1} - x^{>2};$$

вычислить координатное выражение гладкой функции $\mathsf{p} \blacktriangleleft \mathsf{u}$ — значения формы p на векторном поле u.

Задание 20. Пусть теперь задана дифференциальная форма q валентности 2 с координатным выражением

$$\mathsf{q}\left(x\right) = x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>2} \wedge \mathrm{d}x^{>1},$$

и в точке y с координатами $y^{>1} = -1$ и $y^{>2} = 1$ заданы вектор v с координатами $v^{>1} = 1$, $v^{>2} = 1$ и вектор w с координатами $w^{>1} = 1$, $w^{>2} = 1$; вычислить значение $\mathsf{q}\left(y\right)\left(v, w\right)$ формы q в точке y на векторах v, w.

Задание 21. Вычислить значение $\mathsf{u} \lrcorner \mathsf{q}$ внутренней производной формы q валентности 2 с координатным выражением

$$\mathsf{q}\left(x\right) = x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>2} \wedge \mathrm{d}x^{>1}$$

определенным выше векторным полем u с координатным выражением

$$\mathsf{u}^{>1}\left(x\right) = 5 \cdot x^{>1} + x^{>2},$$
$$\mathsf{u}^{>2}\left(x\right) = x^{>1} - 5 \cdot x^{>2}.$$

§ 22 Внешнее умножение

Задание 22. Пусть на некотором гладком многообразии заданы две дифференциальные формы

$$\mathsf{p}(x) := \mathsf{d}x^{\rangle 2} + x^{\rangle 1} \cdot \mathsf{d}x^{\rangle 1},$$
$$\mathsf{q}(x) := x^{\rangle 1} \cdot \mathsf{d}x^{\rangle 1} + \mathsf{d}x^{\rangle 2};$$

вычислить их внешнее произведение.

Задание 23. Пусть заданы две дифференциальные формы

$$\mathsf{p}(x) := \mathsf{d}x^{\rangle 2} + \mathsf{d}x^{\rangle 1},$$
$$\mathsf{r}(x) := x^{\rangle 3} \cdot \mathsf{d}x^{\rangle 1} \wedge \mathsf{d}x^{\rangle 2} + x^{\rangle 2} \cdot \mathsf{d}x^{\rangle 1} \wedge \mathsf{d}x^{\rangle 3};$$

вычислить внешнее произведение $\mathsf{p} \wedge \mathsf{r}$.

Задание 24. Пусть заданы две дифференциальные формы

$$\mathsf{r}(x) := \mathsf{d}x^{\rangle 1} \wedge \mathsf{d}x^{\rangle 2} + \mathsf{d}x^{\rangle 2} \wedge \mathsf{d}x^{\rangle 3},$$
$$\mathsf{s}(x) := \mathsf{d}x^{\rangle 3} \wedge \mathsf{d}x^{\rangle 2} + \mathsf{d}x^{\rangle 4} \wedge \mathsf{d}x^{\rangle 1};$$

вычислить внешнее произведение $\mathsf{r} \wedge \mathsf{s}$.

§ 23 Дифференцирование

Задание 25. Пусть на некотором гладком многообразии в локальных координатах задана дифференциальная форма

$$\mathsf{p}(x) := x^{\rangle 2} \cdot \mathsf{d}x^{\rangle 2} - x^{\rangle 2} \cdot \mathsf{d}x^{\rangle 1};$$

вычислить дифференциал dp этой формы.

Задание 26. Пусть в локальных координатах задана дифференциальная форма

$$\mathsf{q}(x) := (x^{\rangle 1})^2 \cdot \mathsf{d}x^{\rangle 2} + (x^{\rangle 2})^2 \cdot \mathsf{d}x^{\rangle 1};$$

вычислить ее дифференциал dq.

Задание 27. Пусть в локальных координатах задана дифференциальная форма

$$\mathsf{r}(x) := x^{\rangle 2} \cdot \mathsf{d}x^{\rangle 1} \wedge \mathsf{d}x^{\rangle 2} + x^{\rangle 3} \cdot \mathsf{d}x^{\rangle 1} \wedge \mathsf{d}x^{\rangle 3};$$

вычислить ее дифференциал dr.

5.2. Производная Ли

§ 24 Вычисление производной Ли

В этом разделе предполагается, что на некотором трехмерном многообразии задано векторное поле j с координатным выражением

$$\begin{aligned} \mathrm{j}^{>1}(x) &= x^{>2} + x^{>3}, \\ \mathrm{j}^{>2}(x) &= x^{>1} + x^{>3}, \\ \mathrm{j}^{>3}(x) &= x^{>1} + x^{>2}. \end{aligned}$$

Задание 28. Пусть задана функция

$$\mathrm{f}(x) = x^{>2} \cdot x^{>1} + x^{>3};$$

вычислить ее производную Ли полем j.

Задание 29. Пусть задано векторное поле v с координатами

$$\mathrm{v}^{>1}(x) = 2 \cdot x^{>2}, \quad \mathrm{v}^{>2}(x) = 3 \cdot x^{>3}, \quad \mathrm{v}^{>3}(x) = 4 \cdot x^{>1};$$

вычислить его производную Ли полем j.

Задание 30. Пусть задана дифференциальная форма p с координатным выражением

$$\mathrm{p}(x) = x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>3};$$

вычислить ее производную Ли полем j.

Задание 31. Пусть задана дифференциальная форма q с координатным выражением

$$\mathrm{q}(x) = x^{>3} \cdot \mathrm{d}x^{>1} \wedge \mathrm{d}x^{>2};$$

вычислить ее производную Ли полем j.

§ 25 Инфинитезимальная формула Стокса

Задание 32. Пусть на некотором двумерном гладком многообразии в локальных координатах задана дифференциальная форма

$$\mathrm{q}(x) := x^{>1} \cdot \mathrm{d}x^{>1} - x^{>2} \cdot \mathrm{d}x^{>2},$$

и векторные поля

$$\begin{aligned} \mathrm{u}^{>1}(x) &:= x^{>2}, \quad & \mathrm{u}^{>2}(x) &:= x^{>1} - x^{>2}, \\ \mathrm{v}^{>1}(x) &:= x^{>1}, \quad & \mathrm{v}^{>2}(x) &:= x^{>1} - x^{>2}; \end{aligned}$$

вычислить значение $\mathrm{d}q \blacktriangleleft (u, v)$ формы $\mathrm{d}q$ на векторных полях u и v непосредственно и по инфинитезимальной формуле Стокса, сравнив после результаты.

5.3. Теория Фробениуса

§ 26 Одномерное распределение в трехмерном пространстве

Задание 33. Пусть в трехмерном многообразии на окрестности его точки y с координатами $y^{>1} = y^{>2} = y^{>3} = 0$ задано распределение с базисом из одного векторного поля v_1, координатное выражение которого есть

$$\begin{pmatrix} v_1^{>1}(x) \\ v_1^{>2}(x) \\ v_1^{>3}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{>1} \\ x^{>2} \\ x^{>3} + 2 \end{pmatrix};$$

используя метод доказательства Теоремы Фробениуса к заданному распределению построить функции из определения вполне интегрируемости.

§ 27 Двумерное распределение в трехмерном пространстве

Задание 34. Пусть в трехмерном многообразии на окрестности его точки y с координатами $y^{>1} = y^{>2} = y^{>3} = 0$ задано распределение с базисом из двух векторных полей v_1 и v_2, координатное выражение которых есть

$$v_1 : \begin{pmatrix} x^{>3} - 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 : \begin{pmatrix} -x^{>1} \\ -2 \cdot x^{>2} \\ x^{>3} - 1 \end{pmatrix};$$

используя метод доказательства Теоремы Фробениуса к заданному распределению построить функцию из определения вполне интегрируемости.

Список обозначений

Везде применяется тензорное правило Эйнштейна:

если в некоторой формуле есть произведение величин с верхними и нижними индексами, и какой-то индекс встречается в этом произведении только однажды как верхний и как нижний, то в формуле по этому индексу производится суммирование слагаемых вида этого произведения, причем диапазон изменения этого индекса в сумме следует из контекста формулы.

Переменные

вид формулы	**— обозначаемое**
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	— числа нумерации объектов или координат.
τ	— перестановка на некотором множестве $\{1, \dots, \alpha\}$.
a, b, t	— вещественные числа (параметры).
$\mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{h}, \mathrm{k}$	— параметризованное число, отображение.
x, y	— точки многообразия.
M, N	— многообразия.
D, U	— открытые подмножества многообразия.
$\mathtt{c}$	— карта на многообразии.
$\mathtt{k}$	— поток векторного поля.
$\mathtt{m}$	— параметризованная точка многообразия, отображение.
u, v, w	— вектор, касательный вектор.
$\mathsf{j}, \mathsf{u}, \mathsf{v}, \mathsf{w}$	— вектор параметризованный, векторное поле.
p, q, r	— кокасательный тензор, ковариантный тензор.
$\mathsf{p}, \mathsf{q}, \mathsf{r}, \mathsf{s}$	— ковариантное тензорное поле, дифференциальная форма.
$\mathcal{Z}$	— распределение (касательных подпространств).

Специальные обозначения

вид формулы	**— обозначаемое**
$\mathbb{R}$	— множество всех вещественных чисел.
$\mathtt{im}\,\mathrm{f}$	— образ (совокупность всех значений) отображения f.
$\mathtt{c}^{-1}$	— обратное отображение к инъективному $\mathtt{c}$.
$\mathsf{kron}^{\alpha}_{\beta}$	— символ (функция) Кронекера: $\mathsf{kron}^{\alpha}_{\beta} = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \beta. \end{cases}$
$\mathsf{sign}\,\tau$	— знак перестановки τ.
$\mathsf{alt}\,p$	— альтернация ковариантного тензора p.
$x^{>\alpha}$	— координата с номером α точки x.
$v^{>\alpha}$	— координата с номером α вектора v.
$p_{>\alpha,\dots,\beta}$	— координата с номерами $\alpha, \dots, \beta$ ковариантного тензора p.
$\mathcal{C}^{\infty}(M)$	— линейная алгебра гладких функций на многообразии M.
$\mathrm{T}_x M$	— касательное пространство в точке x ко многообразию M.
$\mathrm{T}^*{}_x M$	— кокасательное пространство в точке x ко многообразию M.
$\mathsf{tpr}\,v$	— проекция касательного вектора v в точку, к которой является касательным пространство этого вектора.

$\mathrm{tpr}\, p$ — проекция ковариантного тензора p в точку, к которой является касательным пространство этого тензора.

$\partial_{\alpha} \mathrm{f}$ — частная производная числового отображения f по аргументу с номером α.

$\partial_{>\alpha} \mathrm{f}$ — производная гладкой функции f по координате с номером α.

$\partial_{0} \mathrm{k}$ — производная потока k по параметру траектории.

$\partial_{>\alpha} \mathrm{m}$ — производная отображения m по координате с номером α.

df — дифференциал гладкой функции f.

dm — дифференциал отображения m.

dp — дифференциал дифференциальной формы p.

Операции

вид формулы — обозначаемое

$\tau \hookrightarrow p$ — действие перестановки τ на ковариантном тензоре p.

$p \otimes q$ — тензорное произведение ковариантных тензоров p и q.

$u \wedge v$ — внешнее произведение векторов u и v.

$p \wedge q$ — внешнее произведение ковариантных тензоров p и q.

$\mathrm{v} \overset{\mathcal{D}}{\triangleright} \mathrm{f}$ — производная векторным полем v гладкого числового отображения f.

$[\![\mathrm{u}, \mathrm{v}]\!]$ — коммутатор векторных полей u и v.

$\mathcal{L}_{\mathrm{j}} \mathrm{f}$ — производная Ли гладкой функции f векторным полем j.

$\mathcal{L}_{\mathrm{j}} \mathrm{v}$ — производная Ли векторного поля v векторным полем j.

$\mathcal{L}_{\mathrm{j}} \mathrm{p}$ — производная Ли ковариантного тензорного поля p векторным полем j.

$v \lrcorner p$ — внутренняя производная вектором v ковариантного тензора p.

$p \overset{\alpha}{\leftarrow} v$ — подстановка вектора v как α-того аргумента ковариантного тензора p.

$\mathrm{p} \blacktriangleleft \mathrm{v}_{1}, \ldots, \mathrm{v}_{\alpha}$ — функциональное значение ковариантного тензорного поля p валентности α на векторных полях $\mathrm{v}_{1}, \ldots, \mathrm{v}_{\alpha}$.

$\mathrm{m} \underset{x}{\curvearrowleft} p$ — перенос ковариантного тензора p против отображения m в точку x.

$\mathrm{m} \underset{\star}{\curvearrowleft} \mathrm{p}$ — перенос ковариантного тензорного поля p против отображения m.

$\mathrm{j} \looparrowright \mathrm{f}$ — перенос функции f потоком векторного поля j.

$\mathrm{j} \looparrowright \mathrm{v}$ — перенос векторного поля v потоком векторного поля j.

$\mathrm{j} \looparrowright \mathrm{p}$ — перенос ковариантного тензорного поля p потоком векторного поля j.

Предметный указатель

Список литературы

[1] Краснощёченко В. И., Крищенко А. П. *Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза.* — М. : Издательство МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2005. — 520 с.

[2] Арнольд В. И. *Математические методы классической механики.* — М. : Наука, 1979. — 432 с.

[3] Isidori A. *Nonlinear control systems.* — London : Springer-Verlag, 1995. — xv + 549 с.

[4] Канатников А. Н., Крищенко А. П., Четвериков В. Н. *Дифференциальное исчисление функций многих переменных.* — М. : Издательство МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2000. — 456 с. — (Серия «Математика в техническом университете», выпуск V).

[5] Иванов А. О., Тужилин А. А. *Лекции по классической дифференциальной геометрии.* — М. : Университетская книга; Логос, 2009. — 224 с.

[6] Рашевский П. К. *Курс дифференциальной геометрии.* — М. : Эдиториал УРСС, 2003. — 429 с.

[7] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии.* — М. : Издательство «Факториал Пресс», 2000. — 448 с.

[8] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия.* В 3-х т. Т. 1. Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. — М. : Эдиториал УРСС, 1998. — 336 с.

[9] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия.* В 3-х т. Т. 2. Геометрия и топология многообразий. — М. : Эдиториал УРСС, 1998. — 280 с.

[10] Хорькова Н. Г., Чередниченко А. В. *Элементы дифференциальной геометрии и топологии. Кривые в пространстве.* — М. : Издательство МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2007. — 48 с.

[11] Хорькова Н. Г. *Элементы дифференциальной геометрии и топологии. Риманова геометрия и тензорный анализ.* — М. : Издательство МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2005. — 84 с.

[12] Рашевский П. К. *Риманова геометрия и тензорный анализ.* — М. : Эдиториал УРСС, 2003. — 664 с.

[13] Хорькова Н. Г., Четвериков В. Н. *Элементы дифференциальной геометрии и топологии. Векторные поля на многообразиях. Учебное пособие.* — М. : Издательство МГТУ имени Н. Э. Баумана, 1996. — 48 с.

[14] Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т. *Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии.* — М. : Издательство физико-математической литературы, 2001. — 351 с.