Оглавление

1. Метод интегральных сумм

В рассматриваемых ниже задачах схема рассуждений одна и та же — это *схема введения определенного интеграла.* Искомая физическая величина — работа, кинетическая энергия, сила давления жидкости и т.д. — соответствует определенному промежутку изменения независимой переменной величины – высоты объекта, времени, площади поверхности.

Обозначим искомую величину F, независимую переменную как всегда x, а промежуток ее изменения $[a,\, b]$. При этом F описывается с помощью непрерывной функции $f(x)$, непосредственно связанной с соответствующим физическим законом (законом Паскаля, формулой работы, кинетической энергии, законом Торричелли).

Для определения F составляется интегральная сумма

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i,$$

где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b,\;\; \xi_i \in [x_{i-1},\; x_i]$.

Интегральная сумма F_n задает приближенное значение искомой величины F, которое становится тем более точным, чем меньше длина наибольшего из элементарных отрезков Δx_i.

Перейдя к пределу при $\max \Delta x_i \to 0$, найдем искомую величину в виде определенного интеграла

$$F = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} F_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Для решения типового расчета необходимо знать:

1) формулу работы силы тяжести по переносу тела в вертикальном направлении $A = mgh$, где m — масса тела, h — расстояние, на которое перенесено тело, g — величина ускорения свободного падения;

2) закон Паскаля $P = \rho g h S$, определяющий силу давления жидкости плотностью ρ на плоскую площадку с площадью S при глубине погружения h;

3) формулу кинетической энергии материальной точки $K = \dfrac{mv^2}{2}$, где m — масса материальной точки, v — величина скорости ее движения;

4) закон Торричелли $v = \lambda\sqrt{2gh}$, определяющий скорость вытекания жидкости из отверстия; здесь h — высота столба жидкости над отверстием, λ — коэффициент, зависящий от вязкости жидкости и формы отверстия.

2. Примеры решения задач

Задача 1. Котел имеет форму параболоида вращения, обращенного вершиной вниз. Радиус основания котла R, глубина H. Котел наполнен жидкостью плотности ρ. Вычислить работу, которую надо произвести, чтобы выкачать жидкость из котла.

Указать общую формулу для вычисления и произвести расчет для следующих значений физических и геометрических параметров: $R = 2$ м, $H = 4$ м, $\rho = 0{,}8$ г/см^3, $g = 9{,}81$ м/с^2. Результат представить в системе единиц СИ.

рис.1 Р е ш е н и е. Рассмотрим прямоугольную систему координат $Oxyz$ (рис. 1).

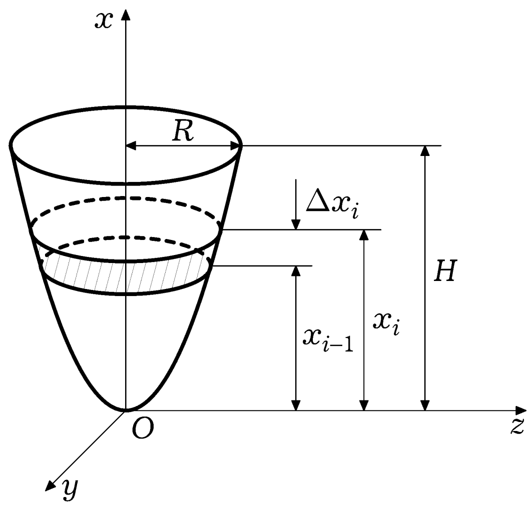

Рис. 1

В этой системе координат уравнение параболоида вращения имеет вид

$$x = a(y^2 + z^2).$$

По условию при пересечении параболоида плоскостью $x = H$ получается окружность $y^2 + z^2 = R^2$ радиуса R:

$$H = aR^2,$$

отсюда $a = \dfrac{H}{R^2}$ и уравнение параболоида задачи $x = \dfrac{H}{R^2}(y^2 + z^2)$.

Для решения задачи выполним разбиение отрезка $[0,\ H]$ изменения переменной x точками:

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = H$$

и через каждую точку x_i $(i = \overline{1, n})$ проведем плоскость $x = x_i$, параллельную плоскости Oyz. При этом котел разобьется на слои высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$(i = \overline{1, n})$. Работа по выкачиванию жидкости из всего котла сводится к суммированию работ по выкачиванию жидкости из таких элементарных слоев.

Найдем работу по выкачиванию жидкости из i-го элементарного слоя. Она сводится к работе по поднятию массы i-го элементарного слоя на высоту края котла. В каждом отрезке $[x_{i-1},\ x_i]$ выберем произвольную точку $\xi_i \in$ $\in [x_{i-1},\ x_i]$ и будем полагать следующее.

рис.2

1. Каждый i-й элементарный слой (рис. 2) имеет форму прямого кругового цилиндра с радиусом основания $r(\xi_i)$ и высотой Δx_i; тогда объем ΔV_i такого слоя равен

$$\Delta V_i = \pi r^2(\xi_i)\Delta x_i.$$

Из уравнения поверхности находим: $r^2(\xi_i) = \dfrac{R^2}{H}\xi_i$; масса Δm_i i-го элементарного слоя определится формулой

$$\Delta m_i = \Delta V_i \rho = \pi\rho\frac{R^2}{H}\xi_i\Delta x_i.$$

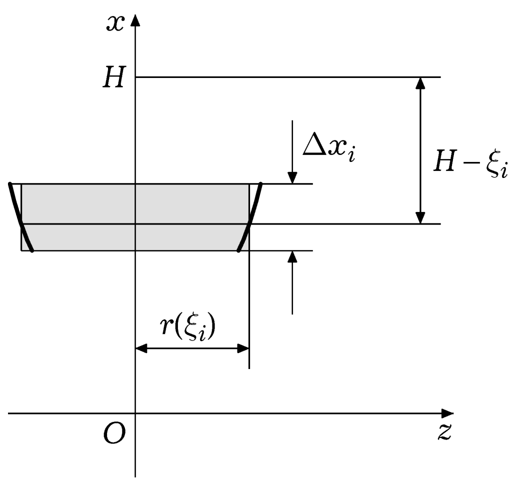

Рис. 2

2. В пределах каждого частичного отрезка $[x_{i-1},\ x_i]$ сила F постоянна и равна ее значению в точке ξ_i:

$$F(\xi_i) = \Delta m_i g.$$

3. Уровень, на котором находится i-й слой, равен $H - \xi_i$.

При сделанных предположениях элементарная работа ΔA_i по выкачиванию жидкости из i-го слоя в форме кругового цилиндра определяется произведением

$$\Delta A_i = F(\xi_i)(H - \xi_i) = \Delta m_i g(H - \xi_i) = \pi\rho\frac{R^2}{H}\xi_i g(H - \xi_i)\Delta x_i.$$

Следовательно, суммарная работа A_n по выкачиванию жидкости из n элементарных слоев определится формулой

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \pi\rho g \frac{R^2}{H} \sum_{i=1}^{n} \xi_i (H - \xi_i)\Delta x_i \quad —$$

это и есть n-я интегральная сумма для функции $f(x) = \pi\rho g \dfrac{R^2}{H} x(H - x)$.

Тогда

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} A_n = \int_0^H f(x)\,dx = \pi\rho g \frac{R^2}{H} \int_0^H x(H - x)\,dx = \frac{1}{6}\pi\rho g R^2 H^2 \quad —$$

общая формула для вычисления работы по выкачиванию жидкости из котла.

Для получения численного результата в системе единиц СИ представим все численные данные задачи в СИ. Радиус R и высота котла H представлены в СИ по условию. Плотность $\rho = 0{,}8\,\text{г/см}^3 = 8 \cdot 10^{-1} \dfrac{10^{-3}}{10^{-6}}\,\text{кг/м}^3 = 8 \cdot 10^2\,\text{кг/м}^3$. В результате[1]

$$A = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 8 \cdot 10^2 \cdot 9{,}81 \cdot 2^2 \cdot 4^2 = 262855{,}68.$$

Размерность: $[A] = \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\,\text{м}^2\text{м}^2 = \dfrac{\text{кг м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж}$.

Таким образом, для выкачивания всей жидкости требуется совершить работу

$$A \approx 263\,\text{кДж}.$$

Задача 2. Вычислить работу по преодолению силы тяжести, которую нужно было произвести, чтобы построить правильную усеченную четырехугольную пирамиду с высотой H, ребром верхнего основания a и ребром нижнего основания b. Плотность строительного кирпича $\rho = 1750\,\text{кг/м}^3$, $H = 4\,\text{м}$, $a = 1\,\text{м}$, $b = 2\,\text{м}$, $g = 9{,}81\,\text{м/с}^2$.

Указать общую формулу для вычисления и произвести расчет для данных выше значений физических и геометрических параметров. Результат представить в системе единиц СИ.

рис.3 Р е ш е н и е. Рассмотрим прямоугольную систему координат $Oxyz$ (рис. 3).

Для решения задачи выполним разбиение отрезка $[0,\ H]$ изменения переменной z точками:

$$0 = z_0 < z_1 < \ldots < z_{i-1} < z_i < \ldots < z_n = H$$

[1]здесь и далее при проведении вычислений π взято равным 3,14.

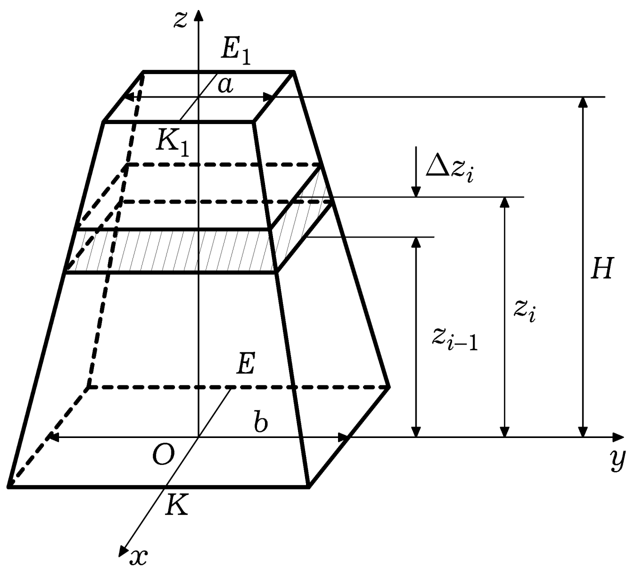

Рис. 3

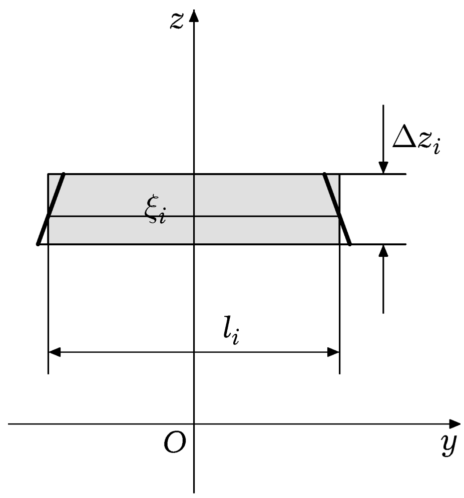

Рис. 4

и через каждую точку z_i $(i = \overline{1,n})$ проведем плоскость $z = z_i$, параллельную плоскости Oxy. При этом пирамида разобьется на слои высотой $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ $(i = \overline{1,n})$. Работа по построению пирамиды сводится к суммированию работ по построению элементарных слоев.

Найдем работу ΔA_i по построению i-го элементарного слоя. В каждом отрезке $[z_{i-1},\ z_i]$ выберем произвольную точку $\xi_i \in [z_{i-1},\ z_i]$ и будем полагать следующее.

рис.4

1. Каждый i-й элементарный слой (рис. 4) имеет форму прямоугольного параллелепипеда высотой Δz_i. Обозначим его сторону основания l_i. Объем ΔV_i элементарного слоя равен $\Delta V_i = l_i^2 \Delta z_i$.

рис.5

Выразим l_i через a, b и H. Достроим усеченную пирамиду до полной и обозначим высоту полной пирамиды d (рис. 5). Из подобия треугольни-

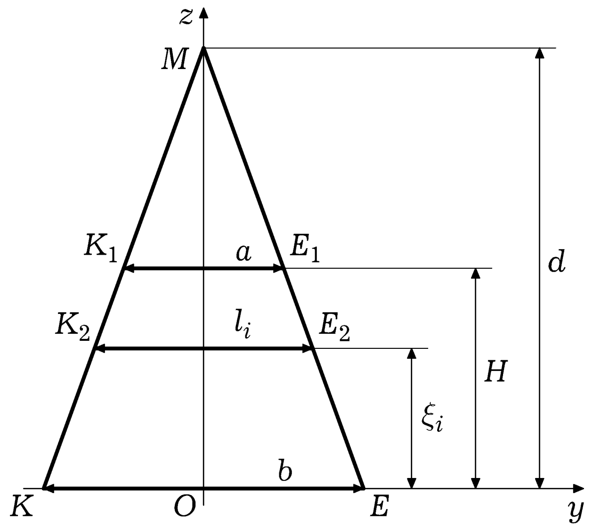

Рис. 5

ков $\triangle K_1ME_1$ и $\triangle KME$ находим $\frac{a}{b} = \frac{d-H}{d}$, откуда $d = \frac{bH}{b-a}$. Из подобия треугольников $\triangle K_2ME_2$ и $\triangle KME$ заключаем, что $\frac{d-\xi_i}{d} = \frac{l_i}{b}$, откуда $l_i = \frac{bH - \xi_i(b-a)}{H}$.

Итак,

$$\Delta V_i = \frac{(bH - \xi_i(b-a))^2}{H^2}\Delta z_i.$$

Масса Δm_i i-го элементарного слоя определится формулой

$$\Delta m_i = \rho\Delta V_i = \rho\frac{(bH - \xi_i(b-a))^2}{H^2}\Delta z_i.$$

2. В пределах каждого частичного отрезка $[z_{i-1},\ z_i]$ сила F постоянна и равна ее значению в точке ξ_i:

$$F(\xi_i) = \Delta m_i g.$$

3. Уровень, на котором находится i-й слой, равен ξ_i.

При сделанных предположениях элементарная работа ΔA_i по построению i-го слоя определяется произведением

$$\Delta A_i = F(\xi_i)\xi_i = \frac{\rho g}{H^2}(bH - \xi_i(b-a))^2\xi_i\Delta z_i.$$

Следовательно, суммарная работа A_n по построению n элементарных слоев определится формулой

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta A_i = \frac{\rho g}{H^2}\sum_{i=1}^{n}(bH - \xi_i(b-a))^2\xi_i\Delta z_i \quad -$$

это и есть n-я интегральная сумма для функции $f(z) = \frac{\rho g}{H^2}(bH - z(b-a))^2 z$.

Тогда

$$A = \lim_{\max\Delta z_i \to 0} A_n = \int_0^H f(z)\,dz =$$
$$= \frac{\rho g}{H^2}\int_0^H (bH - z(b-a))^2 z\,dz = \rho g H^2\left(\frac{b^2+2ab+3a^2}{12}\right) \quad -$$

общая формула для вычисления работы по построению пирамиды.

Для получения численного результата подставим данные из условия в полученное выражение. В данной задаче все величины изначально представлены в системе единиц СИ, поэтому

$$A = 1750 \cdot 9{,}81 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{2^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1^2}{12}\right) = 251790.$$

Размерность: $[A] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\,\frac{\text{м}}{c^2}\,\text{м}^2\text{м}^2 = \frac{\text{кг м}^2}{c^2} = \text{Дж}.$

Таким образом, для построения правильной усеченной пирамиды требуется совершить работу

$$A \approx 251{,}8\ \text{кДж}.$$

Задача 3. Пластина, имеющая форму половины эллипса с полуосями $a = 7$ см, $b = 15$ см и толщину $\delta = 0{,}5$ см, вращается вокруг большей оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 5\pi$ с$^{-1}$. Плотность материала пластины $\rho = 2{,}2$ г/см^3 (фторопласт). Найти кинетическую энергию пластины.

Указать общую формулу для вычисления и произвести расчет для данных выше значений физических и геометрических параметров. Результат представить в системе единиц СИ.

рис.6 Р е ш е н и е. Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy (рис. 6)

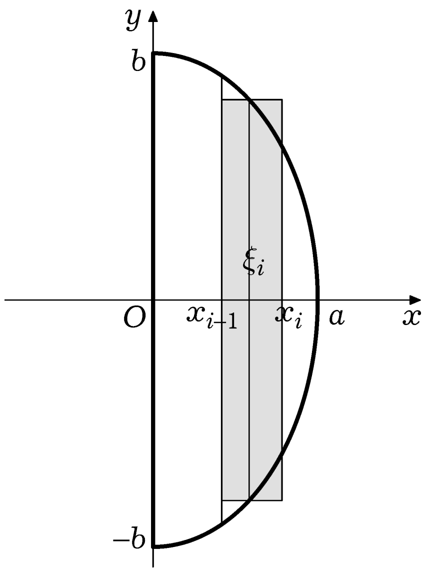

Рис. 6

В этой системе координат уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для решения задачи выполним разбиение отрезка $[0,\ a]$ изменения переменной x точками:

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = a$$

и через каждую точку x_i $(i = \overline{1,n})$ проведем плоскость $x = x_i$, перпендикулярную оси Ox. При этом пластина разобьется на слои шириной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = \overline{1,n})$ и толщиной δ. Кинетическая энергия вращающейся пластины равна сумме кинетических энергий вращения элементарных слоев.

Найдем кинетическую энергию ΔK_i вращения i-го элементарного слоя. В каждом отрезке $[x_{i-1},\ x_i]$ выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_{i-1},\ x_i]$ и будем полагать следующее.

1. Каждый i-й элементарный слой имеет форму прямоугольного параллелепипеда шириной Δx_i, высотой $2y(\xi_i)$ и толщиной δ; тогда объем ΔV_i такого слоя равен

$$\Delta V_i = 2\delta y(\xi_i)\Delta x_i.$$

Из уравнения эллипса находим: $y(\xi_i) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \xi_i^2}$; масса Δm_i i-го элементарного слоя определится формулой

$$\Delta m_i = \Delta V_i \rho = \frac{2\delta b\rho}{a}\sqrt{a^2 - \xi_i^2}\,\Delta x_i.$$

2. В пределах каждого частичного отрезка $[x_{i-1},\ x_i]$ кинетическая энергия ΔK_i постоянна и равна ее значению в точке ξ_i: $\Delta K_i = K(\xi_i) = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2}$. Поскольку линейная скорость связана с угловой соотношением $v_i = \omega\xi_i$, окончательно имеем

$$\Delta K_i = \Delta m_i \frac{(\omega\xi_i)^2}{2}.$$

При сделанных предположениях кинетическая энергия ΔK_i вращения i-го элементарного слоя определяется произведением

$$\Delta K_i = \frac{\delta b\rho\omega^2}{a}\xi_i^2\sqrt{a^2 - \xi_i^2}\,\Delta x_i.$$

Следовательно, суммарная кинетическая энергия K_n вращения n элементарных слоев определится формулой

$$K_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta K_i = \frac{\delta b\rho\omega^2}{a}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\sqrt{a^2 - \xi_i^2}\,\Delta x_i \quad -$$

это и есть n-я интегральная сумма для функции $f(x) = \frac{\delta b\rho\omega^2}{a}x^2\sqrt{a^2 - x^2}$.

Тогда

$$K = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} K_n = \int_0^a f(x)\,dx = \frac{\delta b\rho\omega^2}{a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Для вычисления интеграла $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ целесообразно применить, например, замену $x = a\cos t$:

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} x = a\cos t; \\ dx = -a\sin t\,dt; \\ x = 0 \ \mapsto \ t = \frac{\pi}{2}; \\ x = a \ \mapsto \ t = 0 \end{array}\right] = -a^4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2 t\sin^2 t\,dt =$$

$$= -\frac{a^4}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 2t\,dt = -\frac{a^4}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = -\frac{a^4}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

Окончательно получаем

$$K = \frac{\pi a^3\delta b\rho\omega^2}{16} \quad -$$

общая формула для вычисления кинетической энергии вращающейся пластины.

Для получения численного результата в системе единиц СИ представим все численные данные задачи в СИ. Параметры пластины $a = 7\cdot10^{-2}$ м, $b = 15\cdot10^{-2}$ м, $\delta = 5\cdot10^{-3}$ м, плотность $\rho = 2{,}2$ г/см^3 $= 2{,}2\cdot10^2$ кг/м^3. Подставляя в общую формулу, получаем

$$K \approx 2{,}7\cdot10^{-3} \text{ Дж.}$$

Задача 4. Пластина, боковые грани которой представляют собой ветви равнобочной гиперболы, а верхняя и нижняя грани — отрезки параллельных **рис.7** прямых (рис. 7), погружена вертикально в жидкость плотности ρ. Расстояние

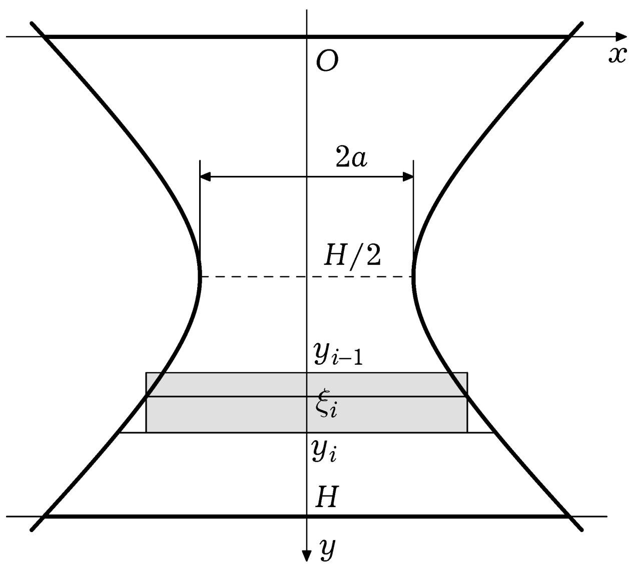

Рис. 7

между ближайшими точками гиперболы $2a$, высота пластины H. Верхняя грань пластины лежит на поверхности жидкости.

Найти величину силы давления жидкости на каждую из сторон пластины. Указать общую формулу для вычисления и произвести расчет для следующих значений физических и геометрических параметров: $a = 10$ см, $H = 30$ см, $\rho = 0{,}8$ г/см^3, $g = 9{,}81$ м/с^2; результат представить в системе единиц СИ.

Решение. В прямоугольной системе координат Oxy (см. рис. 7) уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y - H/2)^2}{a^2} = 1.$$

Для решения задачи выполним разбиение отрезка $[0,\ H]$ изменения переменной y точками:

$$0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{i-1} < y_i < \ldots < y_n = H$$

и через каждую точку y_i $(i = \overline{1,n})$ проведем прямую $y = y_i$, параллельную прямой Ox. При этом пластина разобьется на элементарные полосы шириной $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ $(i = \overline{1,n})$. Сила давления на одну из сторон пластины (любую) сводится к суммированию сил давления на элементарные полосы.

Найдем силу давления ΔF_i на i-ю элементарную полосу. В каждом отрезке $[y_{i-1},\ y_i]$ выберем произвольную точку $\xi_i \in [y_{i-1},\ y_i]$ и будем полагать следующее.

1. Каждая i-я элементарная полоса имеет форму прямоугольника длиной $2\,x(\xi_i)$ и высотой Δy_i ; тогда площадь ΔS_i такой полосы равна $\Delta S_i = 2x(\xi_i)\,\Delta y_i$. Из уравнения гиперболы находим: $x(\xi_i) = \sqrt{a^2 + \left(\xi_i - \frac{H}{2}\right)^2}$, а значит

$$\Delta S_i = 2\sqrt{a^2 + \left(\xi_i - \frac{H}{2}\right)^2}\,\Delta y_i.$$

2. В пределах каждого частичного отрезка $[y_{i-1},\ y_i]$ сила ΔF_i постоянна и равна ее значению в точке ξ_i. Тогда по закону Паскаля имеем

$$\Delta F_i = F(\xi_i) = \rho g \xi_i \Delta S_i = 2\rho g \xi_i \sqrt{a^2 + \left(\xi_i - \frac{H}{2}\right)^2}\,\Delta y_i.$$

Суммарная сила F_n, действующая на n элементарных слоев определится формулой

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = 2\rho g \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sqrt{a^2 + \left(\xi_i - \frac{H}{2}\right)^2}\, \Delta y_i \quad —$$

это и есть n-я интегральная сумма для функции

$$f(y) = 2\rho g y \sqrt{a^2 + \left(y - \frac{H}{2}\right)^2}.$$

Тогда

$$F = \lim_{\max \Delta y_i \to 0} F_n = \int_0^H f(y)\, dy = 2\rho g \int_0^H y \sqrt{a^2 + \left(y - \frac{H}{2}\right)^2}\, dy.$$

В результате замены переменной $t = y - \frac{H}{2}$ вычисляемый интеграл — обозначим его I — приведется к виду

$$I = \int_0^H y \sqrt{a^2 + \left(y - \frac{H}{2}\right)^2}\, dy = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(t + \frac{H}{2}\right) \sqrt{a^2 + t^2}\, dt =$$

$$= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} t\sqrt{a^2 + t^2}\, dt + \frac{H}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sqrt{a^2 + t^2}\, dt.$$

Первый из получившихся интегралов равен 0 как определенный интеграл от нечетной подынтегральной функции в пределах, симметричных относительно начала координат.

Второй интеграл вычисляется интегрированием по частям. Напомним эти вычисления для соответствующего неопределенного интеграла:

$$\int \sqrt{a^2 + t^2}\, dt = \left[\begin{array}{c} u = \sqrt{a^2 + t^2} \ \mapsto \ du = \dfrac{t\, dt}{\sqrt{a^2 + t^2}}; \\ dv = dt \ \mapsto \ v = t \end{array} \right] =$$

$$= t\sqrt{a^2 + t^2} - \int \frac{t^2\, dt}{\sqrt{a^2 + t^2}} = t\sqrt{a^2 + t^2} - \int \frac{a^2 + t^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + t^2}}\, dt =$$

$$= t\sqrt{a^2 + t^2} - \int \sqrt{a^2 + t^2}\, dt + a^2 \int \frac{dt}{\sqrt{a^2 + t^2}} =$$

$$= t\sqrt{a^2 + t^2} - \int \sqrt{a^2 + t^2}\, dt + a^2 \ln(t + \sqrt{a^2 + t^2}).$$

Следовательно,

$$2\int\sqrt{a^2+t^2}\,dt = t\sqrt{a^2+t^2}+a^2\ln\big(t+\sqrt{a^2+t^2}\,\big)+C$$

и

$$\int\sqrt{a^2+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\Big(t\sqrt{a^2+t^2}+a^2\ln\big(t+\sqrt{a^2+t^2}\,\big)+C\Big).$$

Таким образом,

$$I=\frac{H}{2}\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}\sqrt{a^2+t^2}\,dt = H\int_0^{\frac{H}{2}}\sqrt{a^2+t^2}\,dt =$$

$$=\frac{H}{2}\Big(t\sqrt{a^2+t^2}+a^2\ln\big(t+\sqrt{a^2+t^2}\,\big)\Big)\Big|_0^{\frac{H}{2}} =$$

$$=\frac{H}{2}\left(\frac{H}{4}\sqrt{H^2+4a^2}+a^2\ln\frac{H+H\sqrt{H^2+4a^2}}{2a}\right).$$

Окончательно получаем следующую общую формулу для вычисления силы давления жидкости на каждую из сторон пластины:

$$F=\rho g H\left(\frac{H}{4}\sqrt{H^2+4a^2}+a^2\ln\frac{H+\sqrt{H^2+4a^2}}{2a}\right).$$

Для получения численного результата в системе единиц СИ представим все численные данные задачи в СИ. Параметры пластины $a = 10$ см $= 0{,}1$ м, $H = 30\,\text{см} = 0{,}3\,\text{м}$, плотность $\rho = 0{,}8\,\text{г}/\text{см}^3 = 8\cdot10^{-1}\frac{10^{-3}}{10^{-6}}\,\text{кг}/\text{м}^3 = 8\cdot10^2\,\text{кг}/\text{м}^3$. Подставляя в общую формулу, получаем

$$F=8\cdot10^2\cdot9{,}81\cdot0{,}3\cdot\left(\frac{0{,}3}{4}\sqrt{0{,}3^2+4\cdot0{,}1^2}+0{,}1^2\ln\frac{0{,}3+\sqrt{0{,}3^2+4\cdot0{,}1^2}}{2\cdot0{,}1}\right)\approx91{,}8.$$

Размерность: $[F]=\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\,\frac{\text{м}}{c^2}\,\text{м}\sqrt{\text{м}^2}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{c^2}=\text{Н}$.

Таким образом, величина силы давления на сторону пластины (любую) равна

$$F\approx91{,}8\,\text{Н}.$$

Задача 5. Резервуар имеет форму прямого кругового конуса, обращенного вершиной вниз. Через какое время жидкость, наполняющая резервуар, вытечет из него через маленькое отверстие в вершине, если радиус основания $R = 15$ см, высота конуса $H = 50$ см, площадь отверстия $S_0 = 1$ см^2, $\lambda = 0{,}6$, $g = 9{,}81$ м/с^2.

Указать общую формулу для вычисления и произвести расчет для данных выше значений физических и геометрических параметров. Результат представить в системе единиц СИ.

Р е ш е н и е. Будем считать, что размер отверстия в вершине достаточно мал для того, чтобы считать резервуар конусом, а не усеченным конусом.

рис.8 Рассмотрим прямоугольную систему координат $Oxyz$ (рис. 8).

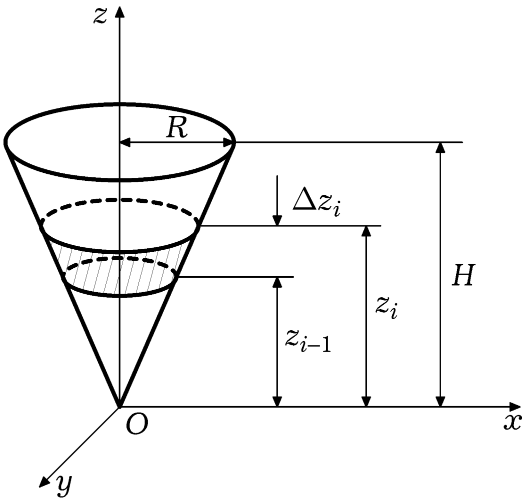

Рис. 8

В этой системе координат каноническое уравнение прямого кругового конуса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

По условию при пересечении конуса с плоскостью $z = H$ получается окружность $x^2 + y^2 = R^2$ радиуса R:

$$\frac{R^2}{a^2} = \frac{H^2}{c^2},$$

отсюда $\dfrac{a^2}{c^2} = \dfrac{R^2}{H^2}$ и уравнение конуса задачи

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2.$$

Для решения задачи выполним разбиение отрезка $[0,\ H]$ изменения переменной z точками:

$$0 = z_0 < z_1 < \ldots < z_{i-1} < z_i < \ldots < z_n = H$$

и через каждую точку z_i $(i = \overline{1, n})$ проведем плоскость $z = z_i$, параллельную плоскости Oxy. При этом конус разобьется на слои высотой $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ $(i = \overline{1, n})$.

Время, за которое жидкость вытечет из всего конического резервуара, равно сумме времен, за которые вытечет жидкость, находящаяся в каждом из таких элементарных слоев.

Выразим элементарный объем жидкости ΔV_i двумя способами.

В каждом отрезке $[z_{i-1},\ z_i]$ выберем произвольную точку $\xi_i \in [z_{i-1},\ z_i]$ и будем полагать следующее.

рис.9

1. Каждый i-й элементарный слой (рис. 9) имеет форму прямого кругового цилиндра с радиусом основания $r(\xi_i)$ и высотой Δz_i; тогда элементарный объем жидкости ΔV_i такого слоя равен

$$\Delta V_i = \pi r^2(\xi_i)\Delta z_i.$$

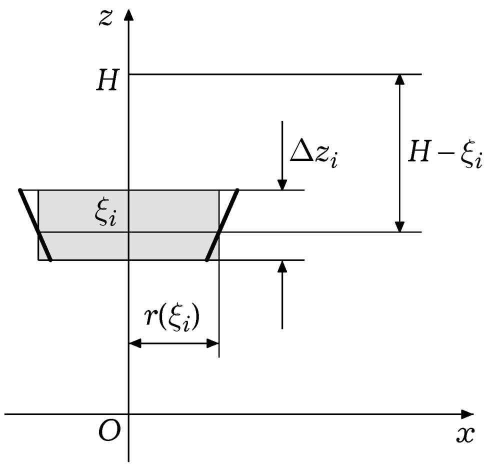

Рис. 9

Из уравнения конуса находим: $r^2(\xi_i) = \dfrac{R^2}{H^2}\xi_i^2$, и, окончательно,

$$\Delta V_i = \frac{\pi R^2}{H^2}\xi_i^2\Delta z_i. \tag{1}$$

2. Уровень, на котором находится i-й слой равен $H - \xi_i$.

3. В пределах каждого частичного отрезка $[z_{i-1},\ z_i]$ скорость истечения жидкости v_i через отверстие постоянна и равна ее значению в точке ξ_i; по закону Торричелли $v_i = \lambda\sqrt{2g(H-\xi_i)}$.

Тогда элементарный объем жидкости ΔV_i, вытекшей из отверстия площадью S_0 за время Δt_i, равен объему прямого кругового цилиндра с площадью основания S_0 и высотой $v_i\Delta t_i$:

$$\Delta V_i = v_i\Delta t_i S_0 = S_0\lambda\sqrt{2g(H-\xi_i)}\,\Delta t_i. \tag{2}$$

Сравнивая выражения (1) и (2), получаем:

$$\frac{\pi R^2}{H^2}\xi_i^2\,\Delta z_i = S_0\lambda\sqrt{2g(H-\xi_i)}\,\Delta t_i,$$

откуда

$$\Delta t_i = \frac{\pi R^2\xi_i^2}{S_0H^2\lambda\sqrt{2g(H-\xi_i)}}\,\Delta z_i.$$

Следовательно, суммарное время T_n истечения жидкости из n элементарных слоев определится формулой

$$T_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta t_i = \frac{\pi R^2}{S_0H^2\lambda\sqrt{2g}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i^2}{\sqrt{H-\xi_i}}\,\Delta z_i \quad -$$

это и есть n-я интегральная сумма для функции

$$f(z) = \frac{\pi R^2 z^2}{S_0H^2\lambda\sqrt{2g(H-z)}}.$$

Тогда

$$T = \lim_{\max\Delta z_i\to 0} T_n = \int_0^H f(z)\,dz = \frac{\pi R^2}{S_0H^2\lambda\sqrt{2g}}\int_0^H\frac{z^2}{\sqrt{H-z}}\,dz.$$

Напомним вычисление интеграла в правой части

$$\int_0^H\frac{z^2}{\sqrt{H-z}}\,dz = \left[\begin{array}{ll} s=\sqrt{H-z}; & z=0 \ \mapsto\ s=\sqrt{H}; \\ z=H-s^2; & z=H \ \mapsto\ s=0; \\ dz=-2s\,ds & \end{array}\right] =$$

$$= \int_{\sqrt{H}}^{0}\frac{(H-s^2)^2}{s}(-2s)\,ds = -2\int_{\sqrt{H}}^{0}(H^2-2Hs^2+s^4)\,ds =$$

$$= -2\left(H^2s-2H\frac{s^3}{3}+\frac{s^5}{5}\right)\bigg|_{\sqrt{H}}^{0} = \frac{16}{15}H^2\sqrt{H}.$$

Подставляя данный результат в полученную ранее формулу для T, получаем общую формулу для вычисления времени истечения жидкости из резервуара:

$$T = \frac{16\pi R^2\sqrt{H}}{15S_0\lambda\sqrt{2g}}.$$

Для получения численного результата в системе единиц СИ представим все численные данные задачи в СИ: радиус $R = 15\,\text{см} = 0{,}15\,\text{м}$, высота конуса

$H = 50$ см $= 0{,}5$ м, площадь отверстия $S_0 = 1$ см$^2 = 10^{-4}$ м^2. Подставляя в общую формулу, получаем

$$T = \frac{16 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}15^2 \cdot \sqrt{0{,}5}}{15 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}6 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81}} \approx 200.$$

Размерность: $[T] = \dfrac{\text{м}^2\sqrt{\text{м}}}{\text{м}^2\sqrt{\text{м}/\text{с}^2}} = \text{с}.$

Таким образом, жидкость вытечет из конического резервуара за

$$T \approx 200 \text{ с} = 3 \text{ мин } 20 \text{ с}.$$

3. Задачи типового расчета

Во всех задачах необходимо:

1) указать общую формулу для вычисления искомой величины;

2) произвести расчет для заданных физических и геометрических параметров, результат представить в системе единиц СИ.

Ускорение свободного падения принять равным $g = 9{,}81$ м/с^2.

Вариант 1

Котел, имеющий форму половины эллипсоида вращения с полуосями a, a и c ($a = 2$ м, $c = 3$ м), наполнен жидкостью плотностью $\rho = 0{,}8$ г/см^3. Вычислить работу, которую надо произвести, чтобы выкачать жидкость из котла.

Вариант 2

Размеры пирамиды Хеопса приблизительно таковы: высота $H = 140$ м, ребро квадратного основания $a = 230$ м. Удельная плотность камня, из которого она построена, примерно равна $\rho = 2500$ кг/м^3. Вычислить работу по преодолению силы тяжести, которую нужно было произвести для ее постройки.

Вариант 3

Пластина в форме параболического сегмента с основанием $2a$ ($a = 1$ м) и высотой $H = 1{,}5$ м погружена вертикально в жидкость плотности $\rho = 0{,}8$ г/см^3 так, что основание сегмента лежит на поверхности. Найти величину силы давления жидкости на каждую из сторон пластины.

Вариант 4

Пластина толщиной $d = 0{,}5$ см, имеющая форму прямого параболического сегмента с основанием $2a$ ($a = 1$ м) и высотой $H = 1{,}5$ м, вращается вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью $\omega = 5\pi$ с$^{-1}$. Плотность материала пластины $\rho = 2{,}2$ г/см^3. Найти кинетическую энергию пластины.

Вариант 5

Резервуар имеет форму параболоида вращения. Через какое время жидкость, наполняющая резервуар, вытечет из него через маленькое отверстие в вершине, если радиус основания резервуара $R = 20$ см, высота $H = 50$ см, площадь отверстия $S_0 = 1$ см^2, $\lambda = 0{,}6$?

Вариант 6

Воронка имеет форму конуса, обращенного вершиной вниз. Высота воронки $H = 2$ м, радиус основания $R = 1{,}2$ м. Она заполнена жидкостью плотностью $\rho = 0{,}8$ г/см^3. Вычислить работу, которую надо произвести, чтобы выкачать жидкость из воронки.

Вариант 7

Какую работу нужно произвести, чтобы насыпать кучу песка конической формы с радиусом основания $R = 12$ м и высотой $H = 15$ м. Удельная плотность песка $\rho = 1300$ кг/м^3.

Вариант 8

Пластина в форме прямого параболического сегмента с основанием $2a$ ($a = 1$ м) и высотой $H = 1{,}5$ м погружена вертикально в жидкость плотности $\rho = 0{,}8$ г/см^3 так, что ось параболы лежит на поверхности. Найти величину силы давления жидкости на каждую из сторон пластины.

Вариант 9

Пластина толщиной $d = 0{,}5$ см, имеющая форму равнобедренного треугольника с основанием $2a = 50$ см и высотой $H = 17$ см, вращается вокруг своего основания с постоянной угловой скоростью $\omega = 5\pi$ с$^{-1}$. Плотность материала пластины $\rho = 2{,}2$ г/см^3. Найти кинетическую энергию пластины.

Вариант 10

Резервуар имеет форму эллипсоида вращения с полуосями a, a и c (эллипсоид расположен вертикально по большей полуоси). Через какое время жидкость, наполняющая резервуар, вытечет из него через маленькое отверстие в вершине, если $a = 20$ см, $c = 50$ см, площадь отверстия $S_0 = 1$ см^2, $\lambda = 0{,}6$?

Вариант 11

Котел имеет форму полусферы радиуса $R = 1$ м. Он наполнен жидкостью плотностью $\rho = 0{,}8\,$г/см^3. Вычислить работу, которую надо произвести, чтобы выкачать жидкость из котла.

Вариант 12

Какую работу нужно произвести, чтобы насыпать кучу песка в форме полусферы радиуса $R = 1{,}2$ м. Удельная плотность песка $\rho = 1300\,$кг/м^3.

Вариант 13

Круглая пластина радиуса $R = 50\,$см наполовину погружена вертикально в жидкость плотности $\rho = 0{,}8\,$г/см^3. Найти величину силы давления жидкости на каждую из сторон пластины.

Вариант 14

Пластина толщиной $d = 0{,}5$см, имеющая форму прямого параболического сегмента с основанием $2a$ ($a = 1$ м) и высотой $H = 1{,}5$ м, вращается вокруг касательной к параболе в ее вершине с постоянной угловой скоростью $\omega = 5\pi\,$с$^{-1}$. Плотность материала пластины $\rho = 2{,}2\,$г/см^3. Найти кинетическую энергию пластины.

Вариант 15

Резервуар имеет форму правильной четырехугольной пирамиды, обращенной вершиной вниз. Через какое время жидкость, наполняющая резервуар, вытечет из него через маленькое отверстие в вершине, если высота пирамиды $H = 50$ см, сторона основания пирамиды $a = 20$ см, площадь отверстия $S_0 = 1$ см^2, $\lambda = 0{,}6$?

Вариант 16

Резервуар имеет форму правильной треугольной пирамиды, обращенной вершиной вниз. Высота пирамиды $H = 3$ м, сторона основания пирамиды $a = 1$м. Резервуар наполнен жидкостью плотностью $\rho = 0{,}8$г/см^3. Вычислить работу, которую надо произвести, чтобы выкачать жидкость из резервуара.

Вариант 17

Вычислить работу по преодолению силы тяжести, которую нужно было произвести, чтобы построить правильную треугольную пирамиду высотой

$H = 20$ м и ребром основания $a = 40$ м. Удельная плотность строительного камня $\rho = 2300$ кг/м^3.

Вариант 18

Пластина, имеющая форму половины эллипса с полуосями $a = 1{,}5$ м и $b = 0{,}7$м, вертикально погружена в жидкость плотности $\rho = 0{,}8$г/см^3 так, что большая ось эллипса лежит на поверхности. Найти величину силы давления жидкости на каждую из сторон пластины.

Вариант 19

Пластина толщиной $d = 0{,}5$ см, имеющая форму равнобочной трапеции (основания $2a = 1{,}8$м, $2b = 1{,}2$м, высота $H = 0{,}7$м), вращается вокруг своего большего основания с постоянной угловой скоростью $\omega = 5\pi$ с$^{-1}$. Плотность материала пластины $\rho = 2{,}2$ г/см^3. Найти кинетическую энергию пластины.

Вариант 20

Резервуар имеет форму полусферы. Через какое время жидкость, наполняющая резервуар, вытечет из него через маленькое отверстие в вершине, если радиус сферы $R = 25$ см, площадь отверстия $S_0 = 1$ см^2, $\lambda = 0{,}6$?

Вариант 21

Резервуар имеет форму правильной пирамиды с квадратным основанием, обращенной вершиной вниз. Высота пирамиды $H = 3$ м, сторона основания $a = 1$м. Резервуар наполнен жидкостью плотностью $\rho = 0{,}8$г/см^3. Вычислить работу, которую надо произвести, чтобы выкачать жидкость из резервуара.

Вариант 22

Пластина, имеющая форму равнобочной трапеции (основания $2a = 1{,}8$ м, $2b = 1{,}2$ м, высота $H = 0{,}7$ м) погружена вертикально в жидкость плотности $\rho = 0{,}8$ г/см^3 так, что большее основание лежит на поверхности. Найти величину силы давления жидкости на каждую из сторон пластины.

Вариант 23

Пластина толщиной $d = 0{,}5$ см, имеющая форму прямоугольного треугольника с катетами $2a$ и $2b$ ($a = 1$ м, $b = 1{,}5$ м), вращается вокруг средней линии треугольника, параллельной катету $2b$, с постоянной угловой скоростью $\omega = 5\pi$ с$^{-1}$. Плотность материалапластины $\rho = 2{,}2$ г/см^3. Найти кинетическую энергию пластины.

Вариант 24

Пластина в форме равнобедренного треугольника с основанием $2a$ ($a = 1$ м) и высотой $H = 1{,}5$ м погружена вертикально в жидкость плотности $\rho = 0{,}8$ г/см^3 так, что основание треугольника лежит на поверхности. Найти величину силы давления жидкости на каждую из сторон пластины.

Вариант 25

Резервуар имеет форму правильной треугольной пирамиды, обращенной вершиной вниз. Через какое время жидкость, наполняющая резервуар, вытечет из него через маленькое отверстие в вершине, если высота пирамиды $H = 50$ см, сторона основания пирамиды $a = 20$ см, площадь отверстия $S_0 = 1$ см^2, $\lambda = 0{,}6$?

Список литературы

1. Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н. Интегральное исчисление функций одного переменного: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 528 с. Сер. Математика в техническом университете, вып. VI).

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Дрофа, 2003. – 512 с.

3. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для втузов / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1993. – 478 с.

4. Дуров В.В., Неклюдов А.В. Метод дифференциалов в приложениях определённого интеграла: Методические указания к практическим занятиям. – М.: Изд-во МГТУ, 1993. – 52 с.