

Оглавление

Введение	2
1. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ (первая задача)	4
1.1. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ	6
1.2. ОСОБОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ЧЕТЫРЕХЗВЕННОГО РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА	8
1.3. КУЛИСНЫЙ МЕХАНИЗМ.....	8
1.4. СДВОЕННЫЙ КРИВОШИПНО-ПОЛЗУННЫЙ МЕХАНИЗМ	10
2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ (ВТОРАЯ И ТРЕТЬЯ ЗАДАЧИ)	11
2.1. ПРИВЕДЕНИЕ СИЛ И МОМЕНТОВ СИЛ.....	12
2.1.1. ЧЕТЫРЕХЗВЕННЫЙ РЫЧАЖНЫЙ МЕХАНИЗМ.....	13
2.1.2. КУЛИСНЫЙ МЕХАНИЗМ	14
2.1.3. СДВОЕННЫЙ КРИВОШИПНО-ПОЛЗУННЫЙ МЕХАНИЗМ.....	15
2.2. ПРИВЕДЕНИЕ МАСС И МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ.....	16
2.2.1. ЧЕТЫРЕХЗВЕННЫЙ РЫЧАЖНЫЙ МЕХАНИЗМ.....	17
2.2.2. КУЛИСНЫЙ МЕХАНИЗМ	18
3. АНАЛИЗ ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ (четвертая и пятая задачи)	19
3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОТЫ ВНЕШНИХ СИЛ.....	22
3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ	23
3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ (ПЕРВЫЙ СПОСОБ).....	24
3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ (ВТОРОЙ СПОСОБ)	24
3.5. ОЦЕНКА НЕРАВНОМЕРНОСТИ ДВИЖЕНИЯ	25
3.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ЗА ЦИКЛ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА	26
3.7. АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА ПО МЕТОДУ Н.И. МЕРЦАЛОВА	27
Задачи для самостоятельного решения	29
Ответы на вопросы задач для самостоятельного решения	34
ЛИТЕРАТУРА	35

Введение

Рубежный контроль знаний студентов по теме «Движение механизмов под действием приложенных сил» включает в себя проверку знаний по двум разделам дисциплины «Теория механизмов и машин», а именно «Кинематика» и «Динамика». Студентам предлагается решить пять задач, условия которых представлены в карте рубежного контроля (рис. 1). В каждой задаче даны пять вариантов ответа, из которых необходимо выбрать единственный правильный ответ на поставленный вопрос.

Задачи рубежного контроля связаны определенной логикой, которая отражает алгоритм решения прямой задачи динамики — определение закона движения механизма при известных внешних силах и моментах, приложенных к нему. При этом предполагается, что для механизмов с одной степенью свободы, а только такие и представлены в картах рубежного контроля, может быть использована одномассовая динамическая модель.

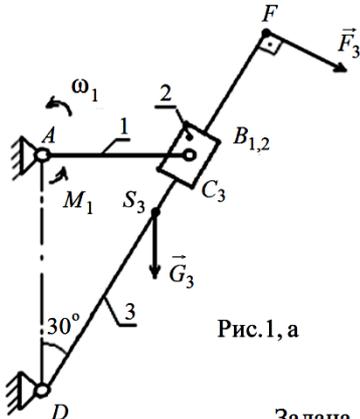
Первая задача посвящена кинематическому анализу механизма, при ее решении обязательно построение плана скоростей. Кроме того, при решении этой задачи необходимо знание таких основных понятий, как звено, кинематическая пара, кинематическая схема механизма, а также освоение приемов для определения видов движения звеньев и правил построения планов скоростей, приобретение навыков в применении теоремы о сложении скоростей.

Вторая и третья задачи посвящены определению основных параметров динамической модели, т. е. определению приведенных к некоторому звену внешних сил и моментов сил, а также масс и моментов инерции. В связи с тем что для приведения параметров необходимо использование кинематических передаточных функций и передаточных отношений, результат решения этих задач зависит от правильности решения первой задачи.

Четвертая и пятая задачи не связаны с решением предыдущих задач. Предполагается знание студентами различных форм записи уравнения, описывающего движение одномассовой динамической модели, и способов его решения как для установившегося, так и неустойчившегося режимов движения. Результатами решения задач могут быть скорость и ускорение движения динамической модели, коэффициент неравномерности движения, работа внешних сил и изменение кинетической энергии за цикл работы механизма.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Кафедра теории механизмов и машин МГТУ им. Н.Э. Баумана
 Рубежный контроль №1
 Тема: «Движение механизмов под действием сил»
 Вариант 9



Исходные данные

- $L_{AB} = 0,4 \text{ м}$
- $L_{DF} = 1,5 L_{DC}$
- $L_{DS_3} = 0,5 L_{DF}$
- $\omega_1 = 10 \text{ рад/с}$
- $F_3 = 100 \text{ Н}$
- $G_3 = 100 \text{ Н}$
- $M_1 = 50 \text{ Н·м}$
- $I_{3S} = 1 \text{ кг·м}^2$

Рис. 1, а

Задача 1

Определить величину скорости V_F , м/с, точки F в заданном положении механизма.

Варианты ответов

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
3,0	2,0	4,0	11,5	1,0

Задача 2

Выбрав за звено привода звено 1 механизма, определить суммарный приведенный момент $M_{\Sigma}^{пр}$, Н·м, от силы \vec{F}_3 и момента $M_1^{пр}$.

Варианты ответов

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
-7,0	20	30	80	-20

Задача 3

Выбрав за звено привода звено 1 механизма, определить $I_3^{пр}$ звена 3, приняв $g=10 \text{ м/с}^2$.

Варианты ответов

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
0,225	62,50	6,25	0,2875	12,5

Задача 4

На рис.1, б представлен график зависимости суммарной работы от угла поворота звена привода. Суммарный приведенный момент инерции имеет постоянную величину $I_{\Sigma}^{пр} = 2 \text{ кг·м}^2$. Определить величину угловой скорости ω , рад/с, звена привода во втором положении механизма, если в начальном положении $\omega_{нач} = 5 \text{ рад/с}$.

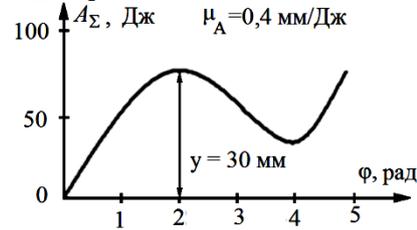


Рис. 1, б

Варианты ответов

№ 1	100
№ 2	8,65
№ 3	35,0
№ 4	10,0
№ 5	27,4

Задача 5

На рис.1, в представлен график зависимости суммарного приведенного момента инерции $I_{\Sigma}^{пр}$ от угла поворота звена привода. Определить угловое ускорение звена привода ϵ_1 во втором положении, в котором $I_{\Sigma}^{пр}$ принимает минимальное значение, а суммарный приведенный момент $M_{\Sigma}^{пр} = 12,5 \text{ Н·м}$.

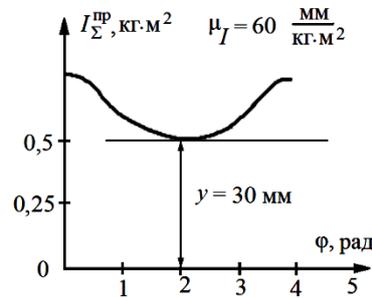


Рис. 1, в

Варианты ответов

№ 1	0,04
№ 2	-2,5
№ 3	25,0
№ 4	-0,04
№ 5	-25,0

Рис.1. Пример карты рубежного контроля

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ (первая задача)

Кинематическое исследование плоских рычажных механизмов графоаналитическим методом основано на использовании теоремы о сложном движении точки (другое название теоремы о сложении скоростей), изучаемой в рамках дисциплины «Теоретическая механика». Эта теорема применима для описания как плоского движения одного звена, так и совместного движения двух звеньев механизма.

Теорема формулируется следующим образом.

Скорость в абсолютном движении равна геометрической сумме скоростей переносного и относительного движений.

Под относительным движением принято понимать движение точки по отношению к подвижной системе отсчета, а переносным — движение самой этой системы и всех связанных с ней точек в «абсолютной системе отсчета» (в рассматриваемых задачах это неподвижная система координат).

Рассмотрим плоское движение некоторого материального тела (рис. 2).

Применив теорему о сложении скоростей для точки B , получим $\vec{V}_{Ba} = \vec{V}_{Be} + \vec{V}_{Br}$, где \vec{V}_{Ba} — абсолютная скорость точки B (обозначим ее \vec{V}_B) относительно системы координат xOy ; V_{Be} — скорость точки B переносного поступательного движения вместе с точкой A этого звена (обозначим ее \vec{V}_A), т. е. $\vec{V}_{Be} = \vec{V}_A$; V_{Br} — скорость точки B в относительном движении, т. е. при вращении точки B вокруг

точки A с угловой скоростью ω (обозначим ее \vec{V}_{BA}). Относительную скорость вычислим следующим образом: $\vec{V}_{Br} = \vec{\omega} \times \overline{AB}$.

Таким образом, формула для определения скорости точки B будет иметь вид

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

Применим теперь теорему о сложном движении точки для случая, когда точки A и B совпадают, но принадлежат не одному материальному телу, а двум телам, движущимся относительно друг друга (рис. 3) со скоростью \vec{V}_{BA} (так называемое сложносоставное движение).

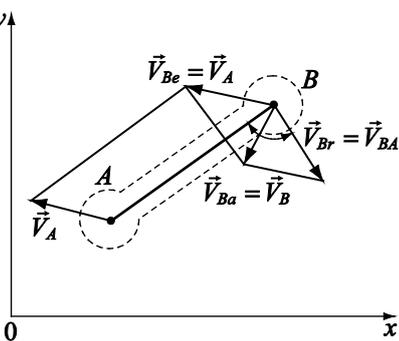


Рис. 2. Схема плоского движения материального тела

Абсолютная скорость точки B , принадлежащей второму телу, будет равна геометрической сумме векторов скорости точки A , принадлежащей первому телу (которая будет в этом случае

ОГЛАВЛЕНИЕ

переносной скоростью), и скорости точки B относительно точки A (которая будет относительной скоростью). Векторное уравнение будет иметь тот же вид

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

Решение первой задачи следует начинать с внимательного прочтения кинематической

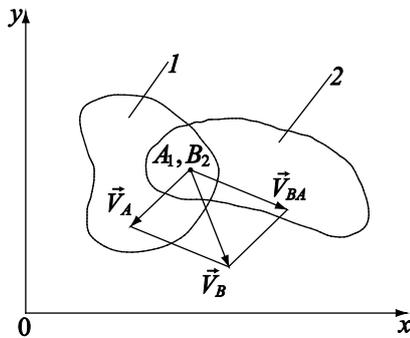


Рис. 3. Схема сложносоставного движения двух материальных тел

схемы и определения соотношений геометрических размеров звеньев, а также расположения отдельных точек. На кинематической схеме механизма подвижные звенья изображены сплошными линиями, а неподвижное звено (стойка) — штриховкой. Звенья соединены друг с другом посредством одноподвижных кинематических пар, допускающих относительное движение, и обозначены латинскими буквами.

Условным обозначением одноподвижных кинематических пар, допускающих относительное вращение, является кру-

жок, а допускающих относительное поступательное движение — прямоугольник.

Затем необходимо определить виды движений, которые совершают звенья механизма. При этом полезно использовать навыки, полученные при проведении анализа структуры механизмов. Следует помнить, что звенья, соединенные со стойкой (неподвижное звено), могут совершать только простое движение — поступательное или вращательное, остальные звенья могут совершать сложное движение. Сложное движение одного звена классифицируется как плоское, состоящее из плоскопараллельного переноса и поворота относительно какой-либо точки. Если движение звена может осуществляться только совместно с другим звеном, то такое движение классифицируется как сложносоставное движение, состоящее из переносного движения одного звена и движения второго звена относительно первого, причем относительное движение — поступательное.

При решении задачи требуется построение плана скоростей, т.е. чертежа, на котором линейные скорости точек представлены в виде векторов. Задача может быть поставлена следующим образом: определить абсолютную величину скорости какой-либо точки или соотношения между скоростями точек. В последнем случае при построении плана скоростей длину отрезка, отражающего вектор скорости первой точки, можно принимать произвольной. Необходимо также помнить, что векторы абсолютных скоростей всегда проходят через полюс плана, а векторы относительных скоростей — вне полюса.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1.1. Общий случай

Заданы кинематическая схема кривошипно-коромыслового механизма (рис. 4) и угловая скорость начального звена ω_1 . Требуется определить соотношение между скоростями точек механизма.

Следует сразу оговориться, что при ответах на вопросы о соотношениях между скоростями точек знать величину угловой скорости ω_1 не обязательно.

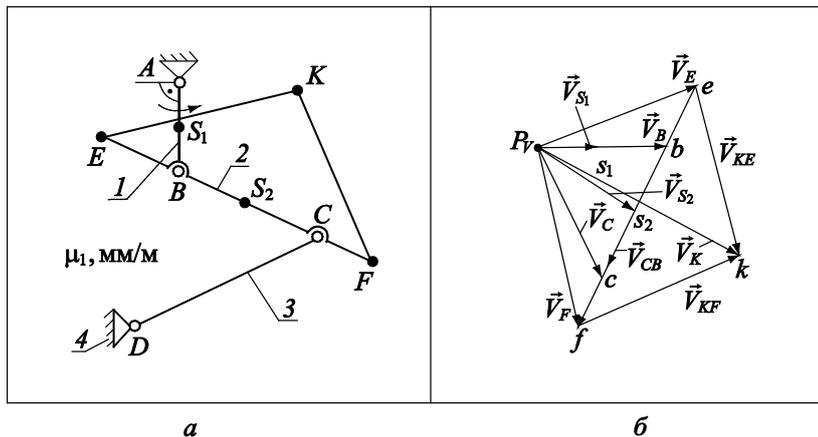


Рис. 4. Кинематическая схема кривошипно-коромыслового механизма (а) и план скоростей (б)

Механизм состоит из четырех звеньев — трех подвижных, показанных на схеме сплошными линиями, и одного неподвижного звена 4, обозначенного на схеме штриховкой (стойка). Звенья соединены друг с другом посредством одноподвижных кинематических пар, обозначенных кружками и допускающих относительное вращение звеньев. С неподвижным звеном связаны звенья 1 и 3, которые совершают вращательные движения. Звено 2 совершает сложное плоское движение.

Для ответа на поставленный в задаче вопрос необходимо построить план скоростей. Запишем векторное уравнение, связывающее скорости точек B и C звена 2, представив плоское движение как поступательное движение точки C совместно с точкой B и одновременный поворот точки C вокруг точки B :

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}.$$

Условимся подчеркивать одной чертой тот вектор, для которого известно направление, двумя чертами — вектор, для которого известны направление и величина. Направления векторов линейных скоростей определяют с помощью схемы механизма. Вектор скорости точки C направлен перпендикулярно звену 3, так как точка C движется по окружности радиусом l_{DC} . Вектор скорости точки B направлен перпендикулярно звену 1, так как точка B движется по

ОГЛАВЛЕНИЕ

окружности радиусом l_{AB} , величина этого вектора равна $V_B = \omega_1 l_{AB}$. Вектор относительной скорости точки C направлен перпендикулярно звену 2, так как в этом движении точка C вращается вокруг точки B . Окончательно получим:

$$\begin{array}{rcc} \vec{V}_C & = & \vec{V}_B + \vec{V}_{CB} \\ \perp DC & \perp AB & \perp CB \\ ? & \omega_1 l_{AB} & ? \end{array}$$

Векторное уравнение, имеющее две неизвестные величины, можно решить графически. Выбрав масштаб построения $\mu_V = p_v b / (\omega_1 l_{AB})$, мм/м · с⁻¹, можно определить величину скорости \vec{V}_C , м/с, по формуле $p_{v,c} / \mu_V$.

Часто в задачах требуется определить скорости других точек звеньев. Применив теорему о сложном движении точки, определим скорость точки E :

$$\begin{array}{rcc} \vec{V}_E & = & \vec{V}_B + \vec{V}_{EB} \\ ?? & \perp AB & \perp EB \\ & \omega_1 l_{AB} & \omega_2 l_{EB} \end{array}$$

Для вектора скорости \vec{V}_{EB} известны направление (он перпендикулярен звену 2) и величина. Модуль этой скорости можно определить либо по формуле $V_{EB} = \omega_2 l_{EB}$, где $\omega_2 = V_{CB} / l_{CB}$, либо используя пропорцию $V_{EB} / V_{CB} = l_{EB} / l_{CB}$.

Аналогично определим скорости точек S_2 и F :

$$\frac{V_{S_2B}}{V_{CB}} = \frac{l_{S_2B}}{l_{CB}}, \quad \frac{V_{FB}}{V_{CB}} = \frac{l_{FB}}{l_{CB}}.$$

Скорость точки K определим по уравнению

$$\begin{array}{rcc} \vec{V}_K & = & \vec{V}_E + \vec{V}_{KE} \\ ?? & & \perp KE \end{array}$$

Скорость точки K можно определить и другим способом:

$$\begin{array}{rcc} \vec{V}_K & = & \vec{V}_F + \vec{V}_{KF} \\ ?? & & \perp KF \end{array}$$

Решив совместно два векторных уравнения для определения скорости \vec{V}_K , получим на плане скоростей точку k . Отрезок $p_v k$ на плане отображает величину и направление искомой скорости V_K . Следует заметить, что получившийся на плане скоростей Δfke подобен ΔFKE на кинематической схеме механизма, причем первый повернут по отношению ко второму на угол $\pi/2$ по направлению угловой скорости ω_2 .

ОГЛАВЛЕНИЕ

Соотношения между линейными скоростями точек механизма определяют по выполненному в масштабе плану скоростей.

1.2. Особое положение четырёхзвенного рычажного механизма

В задачах рубежного контроля рычажные механизмы иногда находятся в так называемых особых положениях, когда скорости некоторых точек равны нулю (рис. 5).

Предположим, что необходимо определить, какая точка механизма в заданном положении обладает наименьшей скоростью. Методика решения задачи остается той же. Построив план скоростей

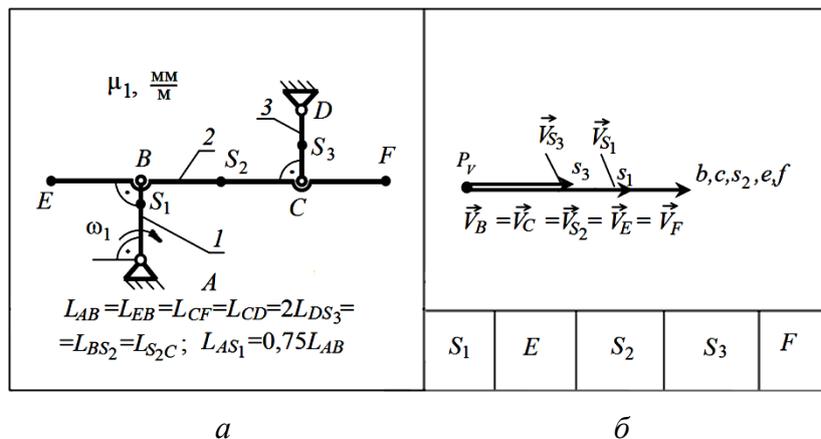


Рис. 5 Кинематическая схема четырехзвенного механизма (а)
и план скоростей (б)

и сравнив по величине скорости различных точек, определяем, что наименьшую скорость имеет точка S_3 .

1.3. Кулисный механизм

Кинематические схемы кулисных механизмов представлены на рис. 6 и 7. Отличительной чертой любого кулисного механизма является обязательное присутствие в его составе звена, совершающего сложносоставное движение. В рассматриваемых примерах это звено 2, так как оно не может совершать четко определенное движение без звена 3 и их движение надо рассматривать совместно. Необходимо отметить, что во всех примерах относительное движение поступательное, а переносное движение может быть разным.

В этой задаче необходимо указать правильное соотношение между величинами линейных скоростей различных точек механизма. Пусть точка B принадлежит одновременно звеньям 1 и

ОГЛАВЛЕНИЕ

2, а совпадающая с ней точка C принадлежит звену 3. Тогда $V_{B_1} = \omega_1 l_{AB}$ и $\underline{\underline{\vec{V}_{B_1}}} = \underline{\underline{\vec{V}_{B_2}}}$, так как относительное вращение звеньев 1 и 2 не оказывает влияния на линейную скорость точки B . В общем случае по теореме о сложении скоростей абсолютная скорость складывается из скорости переносного движения одного звена и относительной скорости движения другого звена:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

В приложении к механизму, схема которого представлена на рис. 6, уравнение выглядит так: сложное движение звена 2 складывается из переносного движения звена 3 и относительного движения звена 2 по звену 3:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\vec{V}_{B_2}}} &= \underline{\underline{\vec{V}_{C_3}}} + \underline{\underline{\vec{V}_{B_2C_3}}} \\ \perp AB &\perp CD \quad \parallel CD \\ \omega_1 l_{AB} &\quad ? \quad ? \end{aligned}$$

Построив план скоростей, определим величины скоростей \vec{V}_{C_3} и $\vec{V}_{B_2C_3}$. Величины скоростей

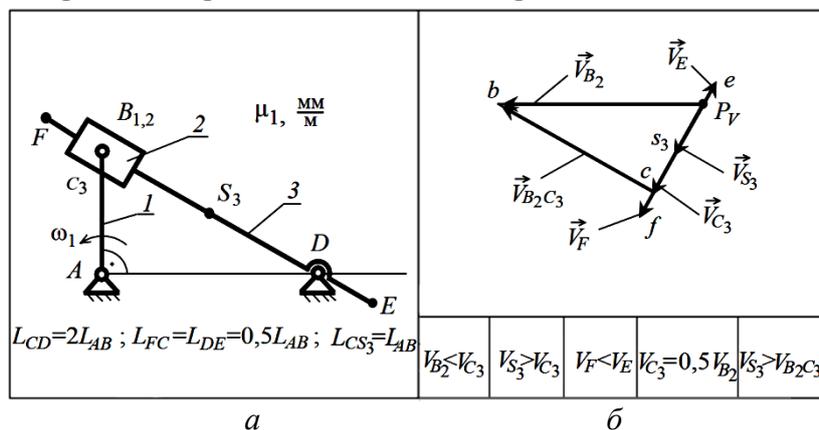


Рис. 6 Кинематическая схема кулисного механизма (переносное движение вращательное) (а) и план скоростей (б)

точек F , E и S_3 определим из соотношений

$$\frac{V_F}{l_{FD}} = \frac{V_{C_3}}{l_{CD}}; \quad \frac{V_E}{l_{ED}} = \frac{V_{C_3}}{l_{CD}}; \quad \frac{V_{S_3}}{l_{S_3D}} = \frac{V_{C_3}}{l_{CD}}.$$

По плану скоростей определяем, что $V_{C_3} = 0,5V_{B_2}$.

В кулисном механизме, кинематическая схема которого приведена на рис. 7, переносное движение звена 2 поступательное.

Сложное движение звена 2 можно описать тем же уравнением:

ОГЛАВЛЕНИЕ

$$\begin{aligned} \underline{\vec{V}}_{B_2} &= \underline{\vec{V}}_{C_3} + \underline{\vec{V}}_{B_2C_3} \\ \perp AB &\parallel S_3D & \parallel C_3S_3 \\ \omega_1 L_{AB} &? & ? \end{aligned}$$

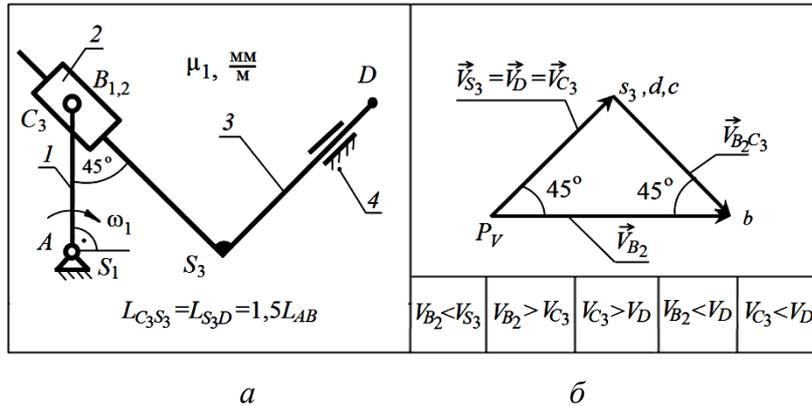


Рис. 7. Кинематическая схема кулисного механизма (переносное движение поступательное) (а) и план скоростей (б)

Построив план скоростей, определяем, что $|\vec{V}_{C_3}| = |\vec{V}_{B_2C_3}|$. Поскольку звено 3 совершает поступательное движение, то скорости всех точек равны между собой: $V_{C_3} = V_{S_3} = V_D$. Следовательно, из пяти приведенных вариантов ответа верным является ответ $V_{B_2} > V_{C_3}$.

1.4. Сдвоенный кривошипно-ползунный механизм

Задана кинематическая схема сдвоенного кривошипно-ползунного механизма (рис. 8). Необходимо определить, какой из пяти вариантов ответа неправильно описывает соотношение скоростей точек механизма для заданного положения. В представленном механизме звено 1 вращается, звенья 3 и 5 движутся поступательно, а звенья 2 и 4 совершают плоское движение.

Плоское движение звена 2 описывается уравнением

$$\begin{aligned} \underline{\vec{V}}_C &= \underline{\vec{V}}_B + \underline{\vec{V}}_{CB} \\ \parallel BC &\perp AB & \perp BC \\ ? &\omega_1 L_{AB} & ? \end{aligned}$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Из решения уравнения следует, что $\vec{V}_C = 0$, т. е. звено 3 неподвижно, и $\vec{V}_{CB} = -\vec{V}_B$, т. е. звено 2 в этом положении совершает вращательное движение.

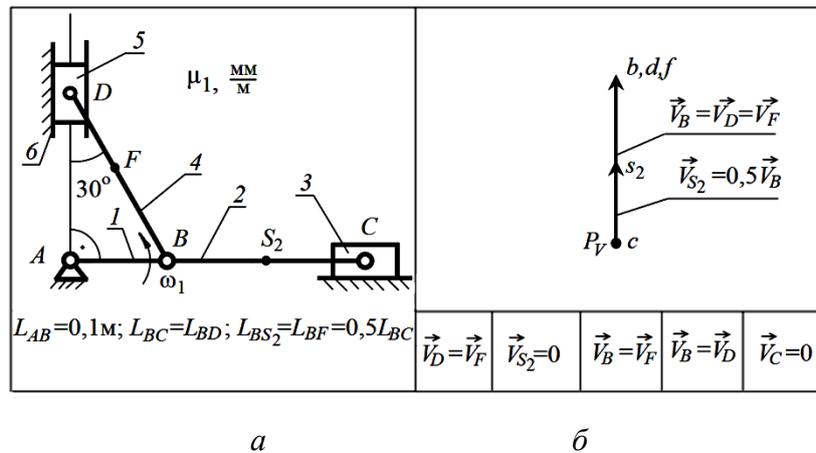


Рис. 8. Кинематическая схема двоянного кривошипно-ползунного механизма (а) и план скоростей (б)

Скорость точки S_2 определяем из соотношения

$$\frac{V_{S_2B}}{V_{CB}} = \frac{l_{BS_2}}{l_{CB}}.$$

Плоское движение звена 4 описывается уравнением

$$\begin{aligned} \vec{V}_D &= \vec{V}_B + \vec{V}_{DB} \\ \parallel DA &\perp AB \perp DB \\ ? &\quad \omega_1 l_{AB} \quad ? \end{aligned}$$

Решением уравнения является равенство скоростей $\vec{V}_D = \vec{V}_B = \vec{V}_F$, т. е. звено 4 движется поступательно.

Анализ движений, совершаемых звеньями механизма в конкретном его положении, позволяет сделать заключение, что скорость точки S_2 не может равняться нулю, так как звено 2 совершает вращательное движение.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ

РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ

(вторая и третья задачи)

Во всех предложенных задачах рассматриваются механизмы, звеном приведения которых выбрано входное звено — кривошип, при этом одномассовая динамическая модель имеет вид, представленный на рис. 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Модель будет двигаться так же, как и звено привода ($\varphi_m = \varphi_1$ и $\omega_m = \omega_1$), только при выполнении нескольких условий, которые вытекают из уравнения, описывающего движение модели.

Уравнение движения модели является формализованным выражением теоремы об изменении кинетической энергии системы. Эта теорема утверждает следующее:

Изменение кинетической энергии системы при ее перемещении из одного положения в другое равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему, на соответствующих перемещениях точек их приложения:

$$T - T_{\text{нач}} = A_d + A_c + A_G + A_r,$$

где T — текущее значение кинетической энергии механизма, нагруженного активными силами (движущими, сопротивления, тяжести) и моментами сил, а также силами трения в кинематических парах механизма; $T_{\text{нач}}$ — значение кинетической энергии механизма в начальный момент времени; A_d — работа движущих сил и моментов сил; A_c — работа сил и моментов сопротивления; A_G — работа сил тяжести звеньев; A_r — работа сил трения в кинематических парах (обычно ею пренебрегают, так как она имеет малые значения).

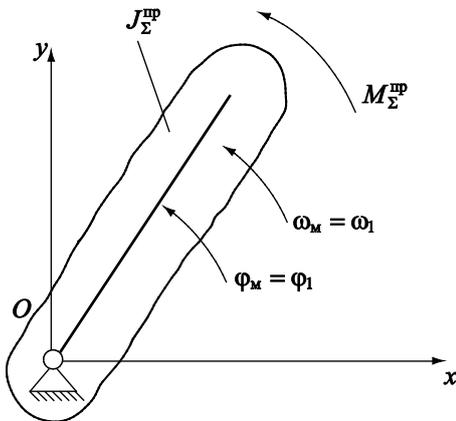


Рис. 9. Одномассовая динамическая модель

Для решения уравнения движения модели необходимо определить кинетическую энергию и работу активных сил, действующих на нее.

2.1. Приведение сил и моментов сил

В основе приведения сил и моментов сил лежит равенство элементарных работ реального силового фактора (силы или момента силы) на элементарных перемещениях (точки или звена) и приведенного момента, приложенного к модели (звену привода), на элементарном перемещении модели (звена).

Приведение сил. Сила \vec{F} приложена в точке B , скорость которой \vec{V}_B , известны модуль и направление силы:

$$dA_F = dA(M_F^{np}),$$

или

$$F dS_B \cos(\vec{F}, d\vec{S}_B) = M_F^{np} d\varphi_1.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Присутствие в последней формуле множителя в виде косинуса угла между направлением вектора силы и направлением перемещения (вектором скорости) позволяет учесть тот факт, что работу может совершать только тангенциальная составляющая силы.

Разделив правую и левую части уравнения на dt , получим

$$M_F^{\text{np}} = F \frac{V_B}{\omega_1} \cos \left(\vec{F}, \hat{V}_B \right).$$

Приведение моментов сил. Момент M_i приложен к i -му звену, угловая скорость которого равна ω_i :

$$dA(M_i) = dA(M_i^{\text{np}}) \quad \text{или} \quad M_i d\varphi_i = M_i^{\text{np}} d\varphi_1.$$

Разделив правую и левую части выражения на dt , получим

$$M_i^{\text{np}} = M_i \frac{\omega_i}{\omega_1}.$$

Проведем анализ решения трех задач по определению значений приведенных моментов сил или соотношений между ними. Рассматривать будем те же рычажные механизмы, которые рассматривались при определении скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизмов.

2.1.1. Четырехзвенный рычажный механизм

На рис. 10 представлена схема четырехзвенного рычажного механизма, кинематический анализ которого был проведен ранее (см. рис. 5). Заданы направления и точки приложения векторов сил \vec{F}_E , \vec{F}_{S_2} , \vec{F}_{S_3} , \vec{F}_C , направление и звено приложения момента M_2 , направление угловой скорости звена 1. Необходимо определить, какой из приведенных моментов $M_{F_C}^{\text{np}}$, $M_{F_{S_2}}^{\text{np}}$, $M_{F_E}^{\text{np}}$, $M_{F_{S_3}}^{\text{np}}$, $M_{M_2}^{\text{np}}$ положителен.

Для решения используем план возможных скоростей, изображенный на рис. 5, и определим направления скоростей точек приложения сил. С учетом этих направлений запишем формулы для определения приведенных моментов:

$$M_{F_E}^{\text{np}} = F_E \frac{V_E}{\omega_1} \cos 45^\circ > 0;$$

$$M_{F_F}^{\text{np}} = F_F \frac{V_F}{\omega_1} \cos \left(\vec{F}_F, \hat{V}_F \right) = F_F \frac{V_F}{\omega_1} \cos 90^\circ = 0;$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

$$M_{F_{S_2}}^{np} = F_{S_2} \frac{V_{S_2}}{\omega_1} \cos \left(\vec{F}_{S_2}, \hat{V}_{S_2} \right) = F_{S_2} \frac{V_{S_2}}{\omega_1} \cos 135^\circ < 0;$$

$$M_{F_{S_3}}^{np} = F_{S_3} \frac{V_{S_3}}{\omega_1} \cos \left(\vec{F}_{S_3}, \hat{V}_{S_3} \right) = F_{S_3} \frac{V_{S_3}}{\omega_1} \cos 180^\circ < 0; \quad M_{M_2}^{np} = M_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} = M_2 \frac{V_{CB}}{l_{CB}} \frac{l_{AB}}{V_B} = 0, \text{ так как } V_{CB} = 0.$$

Положительным является приведенный момент силы $M_{F_E}^{np}$.

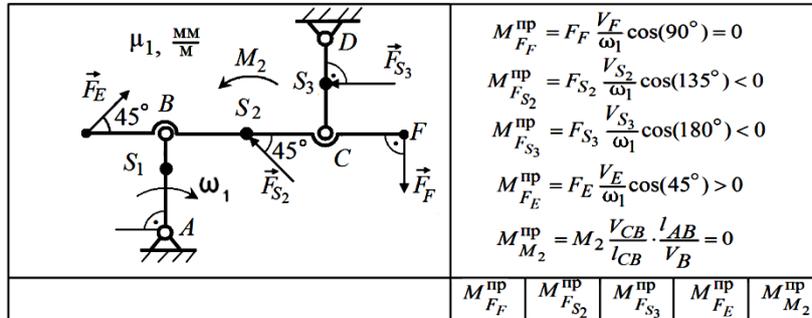


Рис. 10. Схема четырехзвенного рычажного механизма

2.1.2. Кулисный механизм

На рис. 11 представлена схема кулисного механизма. Заданы величины, направления и точки приложения сил \vec{F}_F , \vec{F}_E , \vec{F}_{S_3} и момента M_3 . Выбрав за звено приведения кривошип 1, определить суммарный приведенный момент M_{Σ}^{np} . Длина звена $l_{AB} = 0,1$ м.

План возможных скоростей для заданного положения механизма см. на рис. 6. Определим значения приведенных моментов по следующим формулам:

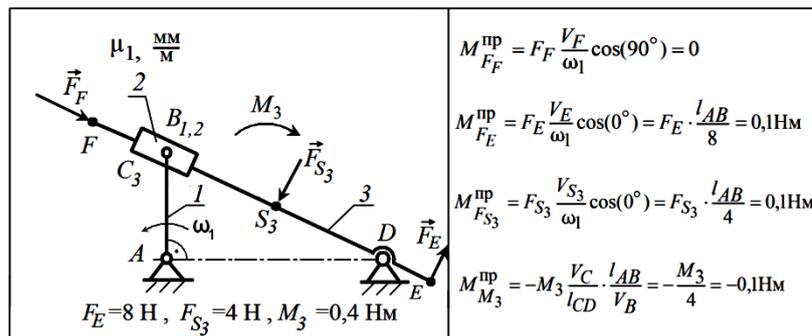


Рис. 11. Схема кулисного механизма

$$M_{F_F}^{np} = F_F \frac{V_F}{\omega_1} \cos \left(\vec{F}_F, \hat{V}_F \right) = F_F \frac{V_F}{\omega_1} \cos 90^\circ = 0;$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

$$M_{F_E}^{np} = F_E \frac{V_E}{\omega_1} \cos \left(\vec{F}_E, \vec{V}_E \right) = F_E \frac{V_E}{\omega_1} \cos 0^\circ = F_E \frac{V_E}{\omega_1},$$

$$\text{где } \frac{V_E}{\omega_1} = \frac{\omega_3}{\omega_1} l_{DE} = \frac{V_C}{l_{CD}} \frac{l_{DE}}{V_B} l_{AB} = \frac{l_{AB}}{8}; \quad V_C = \frac{V_B}{2}; \quad l_{DE} = \frac{l_{AB}}{2}; \quad l_{CD} = 2l_{AB}.$$

$$\text{Следовательно, } M_{F_E}^{np} = F_E \frac{l_{AB}}{8} = 8 \cdot \frac{0,1}{8} = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{F_{S_3}}^{np} = F_{S_3} \frac{V_{S_3}}{\omega_1} \cos \left(\vec{F}_{S_3}, \vec{V}_{S_3} \right) = F_{S_3} \frac{V_{S_3}}{\omega_1} \cos 0^\circ = F_{S_3} \frac{V_{S_3}}{\omega_1},$$

$$\text{где } \frac{V_{S_3}}{\omega_1} = \frac{\omega_3}{\omega_1} l_{DS_3} = \frac{V_C}{l_{CD}} \frac{l_{DS_3}}{V_B} l_{AB} = \frac{l_{AB}}{4}; \quad V_C = \frac{V_B}{2}; \quad l_{DS_3} = l_{AB}; \quad l_{CD} = 2l_{AB};$$

$$M_{F_{S_3}}^{np} = F_{S_3} \frac{l_{AB}}{4} = 4 \cdot \frac{0,1}{4} = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{M_3}^{np} = -M_3 \frac{\omega_3}{\omega_1}.$$

Знак минус в последней формуле говорит о том, что угловая скорость звена 3 ω_3 и момент M_3 направлены в противоположные стороны. Таким образом,

$$M_{M_3}^{np} = -M_3 \frac{V_C}{l_{CD}} \cdot \frac{l_{AB}}{V_B} = -\frac{M_3}{4} = -0,1 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$\text{где } V_C = \frac{V_B}{2}; \quad l_{CD} = 2l_{AB}.$$

Итак, суммарный приведенный момент равен

$$M_{\Sigma}^{np} = M_{F_E}^{np} + M_{F_{S_3}}^{np} + M_{M_3}^{np} = 0,1 + 0,1 - 0,1 = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

2.1.3. Сдвоенный кривошипно-ползунный механизм

На рис. 12 показана схема сдвоенного кривошипно-ползунного механизма. Определить, какой из приведенных моментов от сил \vec{F}_F , \vec{G}_1 , \vec{G}_2 , \vec{G}_3 , \vec{G}_5 наибольший по абсолютной величине, если эти силы равны по модулю.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Вспользуемся планом скоростей, представленным на рис. 8. Приведенный момент силы \vec{F}_F равен нулю, так как угол между направлениями векторов силы \vec{F}_F и скорости \vec{V}_F равен 90° . Приведенные моменты сил \vec{G}_1 и \vec{G}_3 также равны нулю: $M_{G_1}^{np} = 0$, $M_{G_3}^{np} = 0$, так как точка приложения

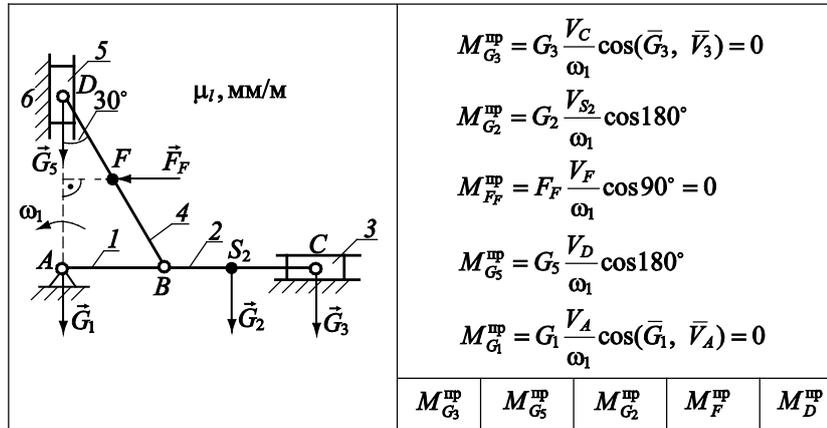


Рис. 12. Схема двойного кривошипно-ползунного механизма

силы G_1 точка A неподвижна, а скорость точки приложения силы G_3 точки C равна нулю. Осталось определить, какой из приведенных моментов сил \vec{G}_2 и \vec{G}_5 больше:

$$\left| M_{G_2}^{np} \right| = G_2 \frac{V_{S_2}}{\omega_1}; \quad \left| M_{G_5}^{np} \right| = G_5 \frac{V_D}{\omega_1}.$$

На плане скоростей видно, что $V_D = 2V_{S_2}$, следовательно, $\left| M_{G_5}^{np} \right| > \left| M_{G_2}^{np} \right|$.

2.2. Приведение масс и моментов инерции

В основе метода приведения масс лежит равенство кинетической энергии реально движущегося механизма и кинетической энергии динамической модели. Кинетическая энергия тела, совершающего плоское движение, равна

$$T_i = m_i \frac{V_{S_i}^2}{2} + I_{S_i} \frac{\omega_i^2}{2},$$

где m_i — масса тела; V_{S_i} — скорость его центра масс; I_{S_i} — момент инерции тела относительно его центра масс; ω_i — угловая скорость тела.

Если тело совершает поступательное движение, то в приведенной выше формуле второе слагаемое равно нулю, если же тело совершает вращательное движение, то нулю равно первое слагаемое.

ОГЛАВЛЕНИЕ

В качестве динамической модели чаще всего выбирают звено, совершающее вращательное движение. В этом случае расчетная динамическая модель, заменяющая реальный механизм, должна обладать неким приведенным моментом инерции, рассчитанным из условия

$$T_M = T_{\text{мех}}; \quad T_M = I_M^{\text{пр}} \frac{\omega_M^2}{2}.$$

Кинетическая энергия механизма определяется как сумма кинетических энергий его подвижных звеньев:

$$T_{\text{мех}} = \sum T_i.$$

Рассмотрим конкретные примеры.

2.2.1. Четырехзвенный рычажный механизм

Задана схема механизма (см. рис. 5). Выбрав за звено приведения звено 1, необходимо определить приведенный момент инерции динамической модели, если $l_{AB} = 0,1$ м; $m_1 = m_3 = 10$ кг; $m_2 = 20$ кг; $I_{S_1} = 0,1$ кг·м²; $I_{S_3} = 0,1$ кг·м²; $\omega_1 = 10$ рад/с.

Кинетическая энергия динамической модели $T_M = T_1 + T_2 + T_3$, где T_1 — кинетическая энергия звена 1, совершающего вращательное движение,

$$T_1 = I_{A_1} \frac{\omega_1^2}{2} = (I_{S_1} + m_1 l_{AS_1}^2) \frac{\omega_1^2}{2};$$

T_2 — кинетическая энергия звена 2, совершающего плоское движение,

$$T_2 = m_2 \frac{V_{S_2}^2}{2} + I_{S_2}^2 \frac{\omega_2^2}{2};$$

T_3 — кинетическая энергия звена 3, совершающего вращательное движение,

$$T_3 = I_{D_3} \frac{\omega_3^2}{2} = (I_{S_3} + m_3 l_{DS_3}^2) \frac{\omega_3^2}{2}.$$

Кинетическая энергия модели имеет три слагаемых по количеству движущихся звеньев:

$$T_M = I_M \frac{\omega_1^2}{2} = I_1^{\text{пр}} \frac{\omega_1^2}{2} + I_2^{\text{пр}} \frac{\omega_1^2}{2} + I_3^{\text{пр}} \frac{\omega_1^2}{2}.$$

Следовательно,

$$I_1^{\text{пр}} \frac{\omega_1^2}{2} = (I_{S_1} + m_1 l_{AS_1}^2) \frac{\omega_1^2}{2};$$

$$I_2^{\text{пр}} \frac{\omega_1^2}{2} = m_2 \frac{V_{S_2}^2}{2} + I_{S_2} \frac{\omega_2^2}{2};$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

$$I_3^{\text{np}} \frac{\omega_1^2}{2} = (I_{S_3} + m_3 l_{DS_3}^2) \frac{\omega_3^2}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$I_1^{\text{np}} = I_{S_1} + m_1 l_{AS_1}^2;$$

$$I_2^{\text{np}} = m_2 \left(\frac{V_{S_2}}{\omega_1} \right)^2 + I_{S_2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2;$$

$$I_3^{\text{np}} = (I_{S_3} + m_3 l_{DS_3}^2) \left(\frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2.$$

По этим трем формулам определяют приведенные моменты инерции звеньев механизма.

Вернемся к решению задачи. Для заданного положения механизма, план возможных скоростей которого показан на рис. 5, $\omega_2 = 0$; $\omega_3 = \omega_1 = 10$ рад/с.

Следовательно,

$$I_1^{\text{np}} = 0,1 + 10 (0,75 \cdot 0,1)^2 = 0,15625 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_2^{\text{np}} = 20 (0,1)^2 + 0,1 \cdot 0 = 0,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_3^{\text{np}} = (0,1 + 10 (0,5 \cdot 0,1)^2) \cdot 1^2 = 0,125 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Суммарный приведенный момент инерции динамической модели равен

$$I_{\Sigma}^{\text{np}} = I_1^{\text{np}} + I_2^{\text{np}} + I_3^{\text{np}} = 0,48125 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

2.2.2. Кулисный механизм

Для механизма, кинематическая схема которого показана на рис. 7а, определить приведенный момент инерции динамической модели, если $l_{AB} = 0,1$ м; $I_{S_1} = I_{S_2} = 0,1$ кг·м²; $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ кг (центр масс звена 2 находится в точке В).

Звено 2 совершает сложное движение, которое в общем случае может быть рассмотрено как комбинация поступательного и вращательного движений. Из условия равенства кинетической энергии звена 2 и кинетической энергии звена приведения 1 получим формулу для определения приведенного момента инерции:

$$T_2 = m_2 \frac{V_{S_2}^2}{2} + I_{S_2} \frac{\omega_2^2}{2} = I_2^{\text{np}} \frac{\omega_1^2}{2}; \quad I_2^{\text{np}} = m_2 \left(\frac{V_B}{\omega_1} \right)^2 + I_{S_2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Рассуждая аналогично относительно звена 3, совершающего поступательное движение, получим

$$T_3 = m_3 \frac{V_{S_3}^2}{2} = I_3^{\text{пр}} \frac{\omega_1^2}{2}; \quad I_3^{\text{пр}} = m_3 \left(\frac{V_{S_3}}{\omega_1} \right)^2.$$

Формула для определения суммарного приведенного момента инерции будет иметь вид

$$I_{\Sigma}^{\text{пр}} = I_{S_1} + m_2 \left(\frac{V_B}{\omega_1} \right)^2 + I_{S_2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_3 \left(\frac{V_{S_3}}{\omega_1} \right)^2.$$

План скоростей механизма (см. рис. 7б) позволяет определить следующее:

$$\omega_2 = 0; \quad \frac{V_B}{\omega_1} = \frac{V_B}{V_A} l_{AB} = l_{AB}; \quad \frac{V_{S_3}}{\omega_1} = \frac{V_B}{\omega_1} \cos 45^\circ = l_{AB} \cos 45^\circ.$$

Следовательно,

$$I_{\Sigma}^{\text{пр}} = 0,1 + 1 \cdot 0,1^2 + 1 \cdot \left(0,1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 0,1 + 0,01 + 0,005 = 0,115 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

3. Анализ закона движения динамической модели (четвертая и пятая задачи)

Четвертая и пятая задачи рубежного контроля служат для проверки знаний по разделу дисциплины, посвященному анализу закона движения механизма под действием заданных сил. Напомним, что такой анализ для механизмов с одной степенью свободы проводят с помощью одномассовой динамической модели (см. рис. 9). В основе анализа лежит описанное выше приведение масс звеньев исходного механизма к так называемому звену приведения. В качестве последнего выбирают начальное звено, которому присваивают номер 1.

Приведенные моменты инерции механизма при этом можно условно разделить на две группы. В первую группу входят моменты инерции, связанные со звеном приведения постоянным передаточным отношением, и само это звено. Приведенные моменты инерции этой группы звеньев являются постоянными ($I_I^{\text{пр}} = \text{const}$). Во вторую группу включены все остальные звенья. Приведенные моменты инерции этой группы звеньев — переменные ($I_{II}^{\text{пр}} = \text{var}$). Следовательно, и суммарный приведенный момент инерции модели $I_{\Sigma}^{\text{пр}} = I_I^{\text{пр}} + I_{II}^{\text{пр}}$ будет величиной переменной.

ОГЛАВЛЕНИЕ

При анализе также предполагают, что все внешние силы и моменты, приложенные к звеньям исходного механизма, могут быть заменены приведенным суммарным моментом $M_{\Sigma}^{\text{пр}}(\varphi_1)$, который зависит от углового положения начального звена φ_1 .

При указанных предположениях движение модели может быть описано одним из следующих уравнений, которые называют уравнениями движения механизма соответственно в энергетической и дифференциальной форме:

$$I_{\Sigma}^{\text{пр}} \frac{\omega_1^2}{2} - T_{\text{нач}} = A_{\Sigma};$$

$$I_{\Sigma}^{\text{пр}} \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dI_{\Sigma}^{\text{пр}}}{d\varphi_1} \omega_1^2 = M_{\Sigma}^{\text{пр}}.$$

Здесь $T_{\text{нач}} = I_{\Sigma_{\text{нач}}}^{\text{пр}} \frac{\omega_{\text{нач}}^2}{2}$ — кинетическая энергия механизма в начальный момент движения.

Суммарную работу внешних сил определяют по выражению

$$A_{\Sigma} = \int_{\varphi_{\text{нач}}}^{\varphi_1} M_{\Sigma}^{\text{пр}} d\varphi_1.$$

Из уравнения движения в энергетической форме можно получить выражение для определения угловой скорости модели:

$$\omega_{\text{м}} = \omega_1 = \sqrt{\frac{2(A_{\Sigma}^{\text{пр}} + T_{\text{нач}})}{I_{\Sigma}^{\text{пр}}}}.$$

Угловое ускорение модели можно вычислить двумя способами. Первый способ основан на преобразовании выражения для угловой скорости с учетом перехода от независимой переменной (времени t) к обобщенной угловой координате φ_1 :

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d\omega_1}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 \frac{d\omega_1}{d\varphi_1}.$$

В соответствии со вторым способом используют уравнение движения, записанное в дифференциальной форме:

$$\varepsilon_1 = \frac{M_{\Sigma}^{\text{пр}}}{I_{\Sigma}^{\text{пр}}} - \frac{\omega_1^2}{2I_{\Sigma}^{\text{пр}}} \frac{dI_{\Sigma}^{\text{пр}}}{d\varphi_1}.$$

В этом случае для определения углового ускорения должна быть известна не только зависимость частоты вращения от угла поворота звена приведения $\omega_1(\varphi_1)$, но зависимости суммарно-

ОГЛАВЛЕНИЕ

го приведенного момента инерции $I_{\Sigma}^{PP}(\varphi_1)$ и суммарного момента внешних сил $M_{\Sigma}^{PP}(\varphi_1)$ от того же угла поворота.

Выбор способа вычисления углового ускорения при решении задачи определяется режимом работы механизма (установившийся или неустановившийся). Если в условиях задач режим явно не указан, то для поиска решения следует использовать косвенные признаки. Например, одним из признаков установившегося движения является то, что сумма работ всех сил за время работы механизма равна нулю: $A_{\Sigma}^u = 0$.

Если учесть, что работа сил тяжести для механизмов с циклическим движением также равна нулю, то работа движущих сил будет равна работе сил сопротивления за цикл работы: $|A_d^u| = |A_c^u|$. Указанные признаки являются следствиями свойств установившегося режима движения, для которого за цикл работы не происходит увеличения или уменьшения кинетической энергии механизма, поэтому скорости движения начального звена в начале и в конце цикла одинаковы.

Для оценки неравномерности движения механизма за цикл работы в установившемся режиме используют величину, называемую коэффициентом неравномерности движения:

$$\delta = \frac{\omega_{1\max} - \omega_{1\min}}{\omega_{1cp}},$$

где ω_{1cp} — среднее значение частоты вращения; $\omega_{1\max}$ и $\omega_{1\min}$ — максимальное и минимальное значения частоты вращения за цикл работы. Обычно стремятся к тому, чтобы неравномерность движения в установившемся режиме была достаточно малой, т. е. чтобы выполнялось неравенство $\delta \ll 1$. Этого достигают присоединением к начальному звену дополнительной массы, называемой маховиком. В расчетах массу маховика учитывают путем увеличения приведенного момента инерции первой группы звеньев I_1^{PP} .

Величина момента инерции первой группы звеньев, обеспечивающего необходимую неравномерность движения, определяется на основании уравнения движения, записанного в энергетической форме $T - T_{нач} = A_{\Sigma}$. Полная кинетическая энергия механизма складывается из кинетических энергий групп звеньев, обладающих постоянной и переменной во время движения величинами $T = T_I + T_{II}$, тогда $T_I = A_{\Sigma} - T_{II} + T_{нач}$. Поскольку неравномерность движения определяется изменением кинетической энергии первой группы звеньев $\Delta T_I = \Delta(A_{\Sigma} - T_{II})$, необходимо найти наибольшую величину этого изменения.

$$\Delta T_{Iоб} = T_{I\max} - T_{I\min} = \frac{I_I^{PP} \omega_{\max}^2}{2} - \frac{I_I^{PP} \omega_{\min}^2}{2} = \frac{1}{2} I_I^{PP} (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2)$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Преобразуем последний сомножитель следующим образом:

$$\frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{2} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} \times (\omega_{\max} - \omega_{\min}) \frac{\omega_{cp}}{\omega_{cp}} = \delta \omega_{cp}^2$$

Следовательно, $\delta = \frac{\Delta T_{\text{инб}}}{I_1^{\text{пр}} \omega_{cp}^2}$.

Эта формула позволяет провести оценку неравномерности установившегося движения при заданных параметрах динамической модели, а также может быть использована для подбора этих параметров при заданных значениях коэффициента неравномерности.

Далее рассмотрим несколько типичных задач. Задачи составлены таким образом, чтобы содержащаяся в них информация была достаточной для получения однозначного ответа. Задачи носят в основном смысловой характер и требуют минимального объема простых вычислений.

3.1. Определение работы внешних сил

На рис. 13 представлена зависимость приведенного движущего момента $M_d^{\text{пр}}$ от угла поворота звена привода φ_1 некоторого механизма. Необходимо определить работу A_d движущего момента при повороте звена привода из позиции 2 в позицию 6.

Известно, что работа момента движущих сил может быть определена по формуле

$$A_d = \int_{\varphi_{\text{нач}}}^{\varphi_{\text{кон}}} M_d^{\text{пр}} d\varphi_1,$$

где $\varphi_{\text{нач}}$ и $\varphi_{\text{кон}}$ — углы поворота звена привода в начальном и конечном положениях.

Геометрическая интерпретация интеграла представляет собой площадь под кривой, а процедура интегрирования идентична процедуре суммирования. Следовательно, результат будет определяться суммой площадей под кривой $M_d^{\text{пр}} = M_d^{\text{пр}}(\varphi_1)$ от позиции 2 до позиции 6:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot a + 2a \cdot a = 2,5 a^2.$$

С учетом масштабов графических построений получим значение работы движущего момента:

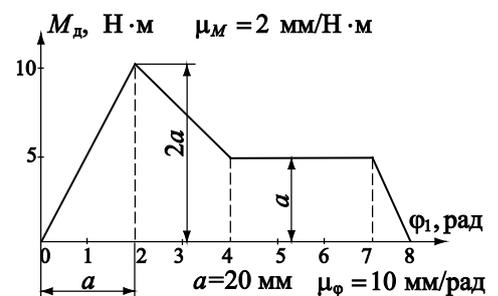


Рис. 13. График приведенного движущего момента

ОГЛАВЛЕНИЕ

$$A_d = \frac{S}{\mu_m \mu_\phi} = \frac{2,5 \cdot 400}{2 \cdot 10} = 50 \text{ Дж.}$$

3.2. Определение скорости движения

На рис. 14 приведены зависимости суммарной работы внешних сил A_Σ и суммарного приведенного момента инерции $I_\Sigma^{\text{пр}}$ от угла поворота звена привода ϕ_1 некоторого механизма. Необходимо определить значение частоты вращения звена привода ω_1 в позиции i , если в начальной позиции оно было неподвижно.

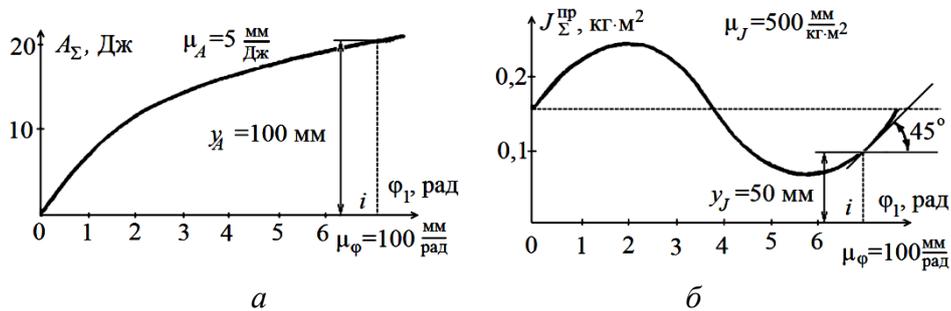


Рис. 14. Графики суммарной работы (а) и приведенного суммарного момента инерции (б)

Для неустановившегося режима движения (его признаком является увеличение значения суммарной работы A_Σ за цикл) частоту вращения находят по формуле

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2(A_\Sigma + T_{\text{нач}})}{I_\Sigma^{\text{пр}}}}.$$

Поскольку в начальном положении механизм неподвижен ($\omega_{\text{нач}} = 0$) и начальная кинетическая энергия механизма $T_{\text{нач}} = 1/2 I_{\Sigma_{\text{нач}}}^{\text{пр}} \omega_{\text{нач}}^2 = 0$, то

$$A_\Sigma = \frac{y_A}{\mu_A} = \frac{100}{5} = 20 \text{ Дж}; \quad I_\Sigma^{\text{пр}} = \frac{y_I}{\mu_I} = \frac{50}{500} = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2A_\Sigma}{I_\Sigma^{\text{пр}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{0,1}} = 20 \text{ рад/с.}$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

3.3. Определение ускорения движения (первый способ)

На рис. 15 представлена зависимость частоты вращения звена привода ω_1 от угла поворота φ_1 . Определить угловое ускорение звена привода $\varepsilon_1^{(i)}$ в позициях 3 и 7.

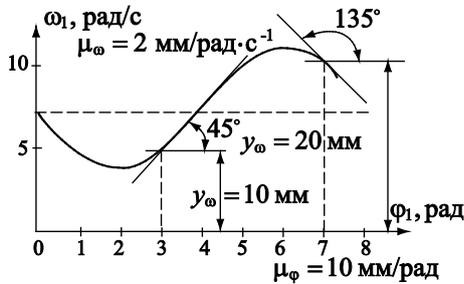


Рис. 15. График частоты вращения звена привода

По определению $\varepsilon_1 = d\omega_1(dt)$. Если выполнить замену переменной, то угловое ускорение может быть найдено следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = \omega_1 \frac{d\omega_1}{d\varphi_1}.$$

Соотношение $d\omega_1 / d\varphi_1$ равно тангенсу угла наклона

касательной к кривой $\omega_1(\varphi_1)$ в конкретной точке. Следовательно,

$$\varepsilon_1^{(i)} = \frac{y_{\omega}^{(i)} \mu_{\varphi}}{\mu_{\omega} \mu_{\omega}} \operatorname{tg}(\alpha_i) = \frac{\mu_{\varphi}}{\mu_{\omega}^2} y_{\omega}^{(i)} \operatorname{tg}(\alpha_i);$$

$$\varepsilon_1^{(3)} = \frac{10}{4} \cdot 10 \cdot 1 = 25 \text{ рад/с}^2;$$

$$\varepsilon_1^{(7)} = \frac{10}{4} \cdot 20 \cdot (-1) = -50 \text{ рад/с}^2.$$

3.4. Определение ускорения движения (второй способ)

На рис. 16 приведены зависимости суммарной работы A_{Σ} и суммарного приведенного момента инерции $I_{\Sigma}^{\text{пп}}$ от угла поворота звена привода φ_1 некоторого механизма при разгоне из неподвижного состояния под действием постоянного приведенного суммарного момента $M_{\Sigma}^{\text{пп}} = 200 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Необходимо определить угловое ускорение ε_1 в i -й позиции.

В основе решения лежит использование уравнения, которое справедливо и для неустановившегося режима разгона:

$$\varepsilon_1 = \frac{M_{\Sigma}^{\text{пп}}}{I_{\Sigma}^{\text{пп}}} - \frac{\omega_1^2}{2I_{\Sigma}^{\text{пп}}} \cdot \frac{dI_{\Sigma}^{\text{пп}}}{d\varphi_1}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Неизвестную частоту вращения ω_1 можно определить способом, изложенным в подразделе 3.2:

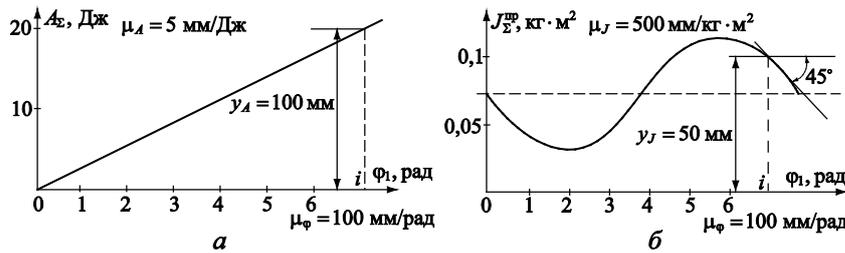


Рис. 16. Графики суммарной работы (а) и приведенного суммарного момента инерции (б) второй группы звеньев

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2(A_\Sigma + T_{\text{нач}})}{I_\Sigma^{\text{np}}}}$$

Поскольку движение начинается из неподвижного состояния, то $T_{\text{нач}} = 0$. Величины A_Σ и I_Σ^{np} определим на основании графиков (см. рис. 14):

$$A_\Sigma = \frac{y_A}{\mu_A} = \frac{100}{5} = 20 \text{ Дж}; \quad I_\Sigma^{\text{np}} = \frac{y_I}{\mu_I} = \frac{50}{500} = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Тогда $\omega_1 = \sqrt{2 \cdot 20 / (0,1)} = 20 \text{ рад/с}$.

Производная $dI_\Sigma^{\text{np}}/d\varphi_1$ численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $I_\Sigma^{\text{np}}(\varphi_1)$ для заданной позиции механизма, т. е.

$$\frac{dI_\Sigma^{\text{np}}}{d\varphi_1} = \frac{\mu_\varphi}{\mu_I} \operatorname{tg}(-45^\circ) = \frac{100}{500} \cdot (-1) = -0,2 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{рад}}.$$

Учитывая, что значение приведенного суммарного момента известно, определим угловое ускорение:

$$\varepsilon_1 = \frac{200}{0,1} + \frac{400}{2 \cdot 0,1} \cdot 0,2 = 2400 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

Следовательно, звено приведения в i -й позиции будет двигаться с ускорением 2400 рад/с^2 .

3.5. Оценка неравномерности движения

На рис. 17 приведена зависимость частоты вращения звена приведения ω_1 от угла поворота данного звена φ_1 . Необходимо определить максимальное значение частоты вращения $\omega_{1\text{max}}$ за

ОГЛАВЛЕНИЕ

цикл установившегося движения, если задан коэффициент неравномерности движения $\delta = 0,02$.

Коэффициент неравномерности движения определим по формуле

$$\delta = \frac{\omega_{1\max} - \omega_{1\min}}{\omega_{1\text{cp}}}$$

Учитывая, что $\omega_{1\text{cp}} = 1/2(\omega_{1\max} + \omega_{1\min})$, получим

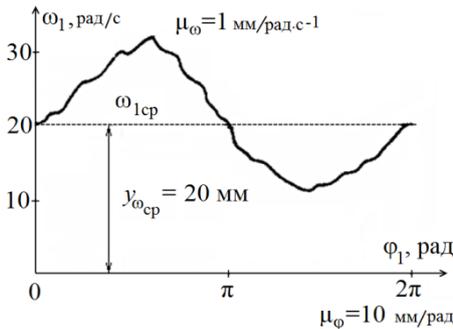


Рис. 17. График частоты вращения звена привода

$$\delta = 2 \frac{\omega_{1\max} - \omega_{1\min}}{\omega_{1\max} + \omega_{1\min}}$$

После элементарных алгебраических преобразований приходим к формуле для вычисления значения $\omega_{1\max}$ при заданных условиях:

$$\omega_{1\text{cp}} = \omega_{1\text{cp}} \left(1 + \frac{\delta}{2} \right);$$

$$\omega_{1\max} = \frac{y_{\omega}}{\mu_{\omega}} \left(1 + \frac{\delta}{2} \right) = \frac{20}{1} \left(1 + \frac{0,02}{2} \right) = 20,2 \text{ рад/с.}$$

3.6. Определение кинетической энергии

за цикл установившегося движения механизма

Последующие примеры иллюстрируют решение задач, касающихся анализа установившегося движения механизма с использованием общего подхода, а также простого и наглядного метода Н.И. Мерцалова.

На рис. 18 представлена зависимость частоты вращения звена привода ω_1 от угла поворота данного звена φ_1 за цикл установившегося движения некоторого механизма. Необходимо определить наибольшее изменение кинетической энергии первой группы звеньев $\Delta T_{\text{гнб}}$, если приведенный момент инерции этой группы $I_1^{\text{пр}} = 4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

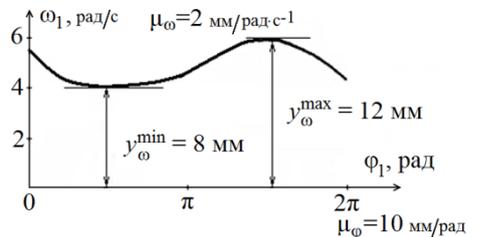


Рис. 18. График частоты вращения звена привода

Наибольшее значение кинетической энергии первой группы звеньев связано с частотой вращения следующей зависимостью:

ОГЛАВЛЕНИЕ

$$\Delta T_{\text{нб}} = I_1^{\text{пр}} \omega_{1\text{ср}}^2 \delta.$$

Определим минимальное и максимальное значения частоты вращения:

$$\omega_{1\text{max}} = \frac{y_{\omega}^{\text{max}}}{\mu_{\omega}} = \frac{12}{2} = 6 \text{ рад/с}, \quad \omega_{1\text{min}} = \frac{y_{\omega}^{\text{min}}}{\mu_{\omega}} = \frac{8}{2} = 4 \text{ рад/с}.$$

Среднее значение частоты вращения

$$\omega_{1\text{ср}} = \frac{\omega_{1\text{max}} + \omega_{1\text{min}}}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5 \text{ рад/с}.$$

Коэффициент неравномерности движения равен

$$\delta = \frac{\omega_{1\text{max}} - \omega_{1\text{min}}}{\omega_{1\text{ср}}} = \frac{6 - 4}{5} = 0,4.$$

Следовательно, $\Delta T_{\text{нб}} = I_1^{\text{пр}} \omega_{1\text{ср}}^2 \delta = 4 \cdot 25 \cdot 0,4 = 40 \text{ Дж}$.

3.7. Анализ движения механизма по методу Н.И. Мерцалова

На рис. 19 представлены зависимости суммарной работы A_{Σ} от угла поворота звена привода φ_1 и моментов инерции второй группы звеньев I_{II}^* и I_{II}^{**} двух механизмов. Необходимо определить соотношение между коэффициентами неравномерности движения δ^* и δ^{**} этих механизмов при условии равенства средних значений частот вращения $\omega_{1\text{ср}}^* = \omega_{1\text{ср}}^{**} = 1 \text{ рад/с}$ и моментов инерции первой группы звеньев $I_1^* = I_1^{**}$.

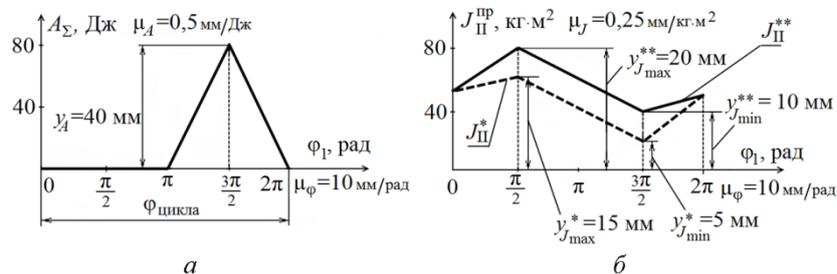


Рис. 19. Графики суммарной работы (а) и приведенного суммарного момента инерции (б) второй группы звеньев

Прежде чем приступить к решению, необходимо напомнить последовательность анализа движения механизма по методу Н.И. Мерцалова.

1. Построение графика $A_{\Sigma}(\varphi_1)$ по имеющемуся графику $M_{\Sigma}^{\text{пр}}(\varphi_1)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

2. Построение графика $I_{II}^{pp}(\varphi_1)$.
3. Определение кинетической энергии $T_{II} = 1/2 I_{II}^{pp} \omega_{Icp}^2$ и построение графика $T_{II}(\varphi_1)$.
4. Построение графика $T_I(\varphi_1)$ и определение изменения $\Delta T_I(\varphi_1)$.
5. Определение момента инерции I_I^{pp} или коэффициента неравномерности δ .

Этапы 1 и 2 в данной задаче исключаются, так как перечисленные зависимости заданы. Согласно этапу 3 графики $T_{II}(\varphi_1)$ и $I_{II}^{pp}(\varphi_1)$ совпадают, поскольку между их масштабами существует соотношение $\mu_T = \frac{2\mu_I}{\omega_{Icp}^2} = 0,5$ мм/Дж.

В соответствии с этапом 4 необходимо построить график $T_I(\varphi_1)$, воспользовавшись зависимостью $T_I = A_\Sigma - T_{II} + T_{нач}$. Однако в данном случае достаточно легко догадаться, что значение кинетической энергии первой группы звеньев обоих механизмов будет минимальным в положении $\varphi_1 = \pi/2$, а максимальным — в положении $\varphi_1 = 3\pi/2$:

$$T_{Imin}^* - T_{нач} = 0 - \frac{y_{Tmax}^*}{\mu_T} = 0 - \frac{15}{0,5} = -30 \text{ Дж};$$

$$T_{Imin}^{**} - T_{нач} = 0 - \frac{y_{Tmax}^{**}}{\mu_T} = 0 - \frac{20}{0,5} = -40 \text{ Дж}.$$

Знак минус в полученных результатах является следствием учета значения начальной кинетической энергии $T_{нач}$:

$$T_{Imax}^* = \frac{y_A}{\mu_A} - \frac{y_{Tmin}^*}{\mu_T} = \frac{40}{0,5} - \frac{5}{0,5} = 70 \text{ Дж};$$

$$T_{Imax}^{**} = \frac{y_A}{\mu_A} - \frac{y_{Tmin}^{**}}{\mu_T} = \frac{40}{0,5} - \frac{10}{0,5} = 60 \text{ Дж}.$$

Тогда

$$\Delta T_{In6} = T_{Imax} - T_{Imin};$$

$$\Delta T_{In6}^* = 70 - (-30) = 100 \text{ Дж};$$

$$\Delta T_{In6}^{**} = 60 - (-40) = 100 \text{ Дж}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Коэффициент неравномерности можно определить по формуле

$$\delta = \frac{\Delta T_{\text{инб}}}{I_1^{\text{нп}} \omega_{\text{ср}}^2}.$$

На основании исходных данных знаменатель в выражении для определения δ является величиной постоянной. Но из расчетов следует, что $\Delta T_{\text{инб}}^* = \Delta T_{\text{инб}}^{**}$, поэтому $\delta^* = \delta^{**}$.

Задачи для самостоятельного решения

Ниже приведены задачи для самостоятельного решения, ответы на поставленные в них вопросы можно узнать в следующем разделе.

Задача 1

На рис. 20 приведена схема четырехзвенного рычажного механизма, положение которого определяется обобщенной координатой $\varphi_1 = 0^\circ (\angle BDC = 90^\circ)$.

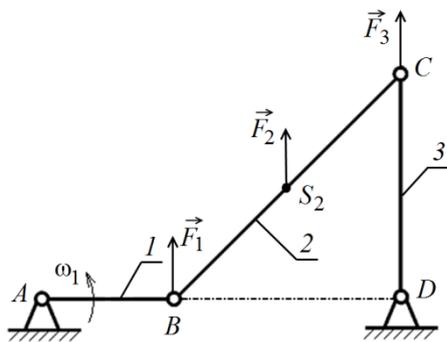


Рис. 20. Схема механизма к задаче 1

Известны следующие параметры:

- линейные размеры звеньев
 $l_{AB} = 0,1 \text{ м}; l_{CD} = 0,2 \text{ м}; l_{AD} = 0,3 \text{ м};$
- масса и момент инерции второго звена
 $m_2 = 2 \text{ кг}; I_{S_2} = 0,02 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$
- внешние силы, действующие на механизм,
 $F_1 = F_2 = F_3 = 100 \text{ Н};$

- угловая скорость первого звена $\omega_1 = 10 \text{ рад/с}.$

Вопрос 1. Определить линейную скорость точки S_2 .

Вопрос 2. Определить суммарный приведенный к звену 1 момент $M_{\Sigma}^{\text{нп}}$ от приложенных к механизму сил \vec{F}_1 , \vec{F}_2 и \vec{F}_3 . Приведенный момент от какой силы равен нулю?

Вопрос 3. Определить суммарный приведенный к звену 1 момент инерции звена 2
 $I_2^{\text{нп}} = I_{2\text{п}}^{\text{нп}} + I_{2\text{в}}^{\text{нп}}.$

Задача 2

На рис. 21 приведена схема кулисного механизма, положение которого определяется обобщенной координатой $\varphi_1 = 90^\circ (\angle BSA = 30^\circ)$.

Известны следующие параметры:

ОГЛАВЛЕНИЕ

- линейные размеры звеньев $l_{AB} = 0,1 \text{ м}$; $l_{KC} = 0,1 \text{ м}$; масса и момент инерции третьего звена $m_3 = 5 \text{ кг}$; $I_{S_3} = 0,064 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$;

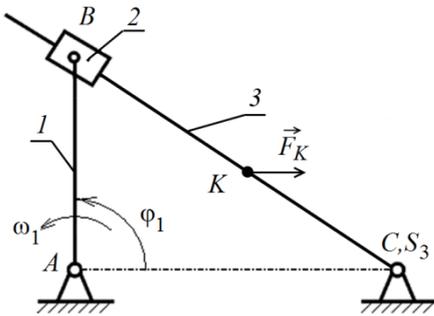


Рис. 21. Схема механизма к задаче 2

- внешняя сила, действующая на механизм, $\vec{F}_K = 400 \text{ Н}$;
 - угловая скорость первого звена $\omega_1 = 20 \text{ рад/с}$.
- Вопрос 1. Определить линейную скорость точки K.
- Вопрос 2. Определить приведенный к звену 1 момент от приложенной силы \vec{F}_K .
- Вопрос 3. Определить приведенный к звену 1 момент инерции третьего звена $I_3^{пр}$.

Задача 3

На рис. 22 приведена схема кулисного механизма, положение которого определяется обобщенной координатой $\varphi_1 = 60^\circ$ ($\angle ABC = 90^\circ$).

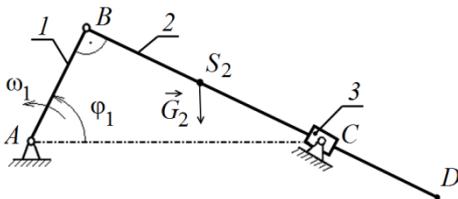


Рис. 22. Схема механизма к задаче 3

Известны следующие параметры:

- линейные размеры звеньев $l_{AC} = 0,3 \text{ м}$; $l_{CD} = l_{BS_2} = l_{S_2C}$;
- масса и момент инерции звена 2 $m_2 = 2 \text{ кг}$; $I_{S_2} = 0,04 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$;
- угловая скорость звена 1 $\omega_1 = 20 \text{ рад/с}$.

Вопрос 1. Определить линейную скорость точки D.

Вопрос 2. Определить приведенный к звену 1 момент от силы тяжести звена G_2 , приняв $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Вопрос 3. Определить приведенный к звену 1 момент инерции звена 2 $I_2^{пр}$.

Задача 4

На рис. 23 приведена схема четырехзвенного рычажного механизма, положение которого определяется обобщенной координатой $\varphi_1 = 180^\circ$ ($\angle BCD = 45^\circ$, $\angle CDA = 90^\circ$).

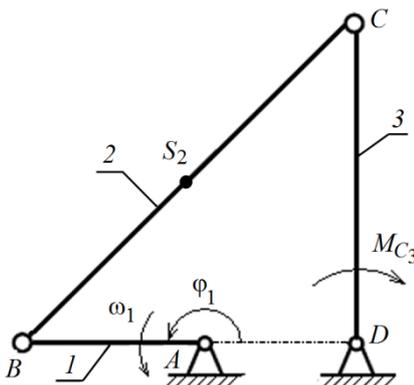


Рис. 23. Схема механизма к задаче 4

Б. И. Плужников, С. Е. Люминарский

- массы и моменты инерции звеньев 2 и 3 $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг,
 $I_{S_2} = 0,02$ кг·м², $I_{S_3} = 0,04$ кг·м²;
- внешний момент, действующий на механизм $M_{C_3} = 20$ Н·м;
 - угловая скорость звена 1 $\omega_1 = 20$ рад/с.

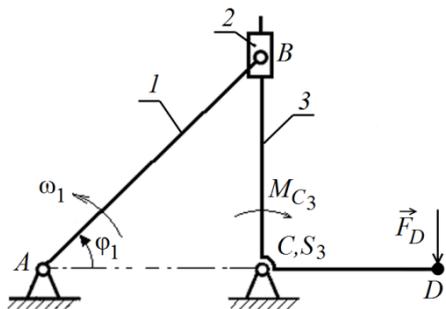
Вопрос 1. Определить угловую скорость звена 2 ω_2 .

Вопрос 2. Определить приведенный к звену 1 момент от приложенного к звену 3 внешнего момента $M_{C_3}^{np}$.

Вопрос 3. Определить суммарный приведенный к звену 1 момент инерции звеньев 2 и 3 I_{Σ}^{np} .

Задача 5

На рис. 24 приведена схема кулисного механизма, находящегося в положении, определяемом обобщенной координатой $\varphi_1 = 45^\circ$ ($\angle BSA = 90^\circ$).



Известны следующие параметры:

- линейные размеры звеньев $l_{AB} = 0,2$ м; $l_{CD} = 0,2$ м;
- масса и момент инерции третьего звена $m_3 = 2$ кг;
 $I_{S_3} = 0,02$ кг·м²;
- внешние сила и момент, действующие на механизм,

Рис. 24. Схема механизма к задаче 5 $F_D = 50$ Н; $M_{C_3} = 10$ Н·м;

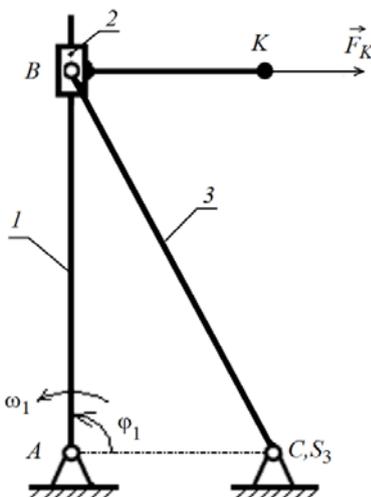
- угловая скорость первого звена $\omega_1 = 5$ рад/с.

Вопрос 1. Определить линейную скорость точки D.

Вопрос 2. Определить суммарный приведенный к звену 1 момент от силы F_D и момента M_{C_3} .

Вопрос 3. Определить приведенный к звену 1 момент инерции звена 3 I_3^{np} .

Задача 6



На рис. 25 приведена схема кулисного механизма, находящегося в положении, определяемом обобщенной координатой $\varphi_1 = 90^\circ$.

Известны следующие параметры:

- линейные размеры звеньев
 $l_{AC} = l_{BK} = 0,1$ м; $l_{AB} = 0,2$ м;

ОГЛАВЛЕНИЕ

Б. И. Плужников, С. Е. Люминарский
«МЕХАНИЗМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРИЛОЖЕННЫХ СИЛ»

Рис. 25. Схема механизма к задаче 6

- масса и момент инерции третьего звена $m_3 = 2$ кг; $I_{S_3} = 0,03$ кг·м²;
- внешняя сила, действующая на механизм, $F_K = 200$ Н;
- угловая скорость первого звена $\omega_1 = 10$ рад/с.

Вопрос 1. Определить линейную скорость точки K.

Вопрос 2. Определить приведенный к звену 1 момент от силы \vec{F}_K .

Вопрос 3. Определить приведенный к звену 1 момент инерции звена 3 $I_3^{пр}$.

Задача 7

На рис. 26 представлены зависимости приведенного движущего момента $M_d^{пр}$ и приведен-

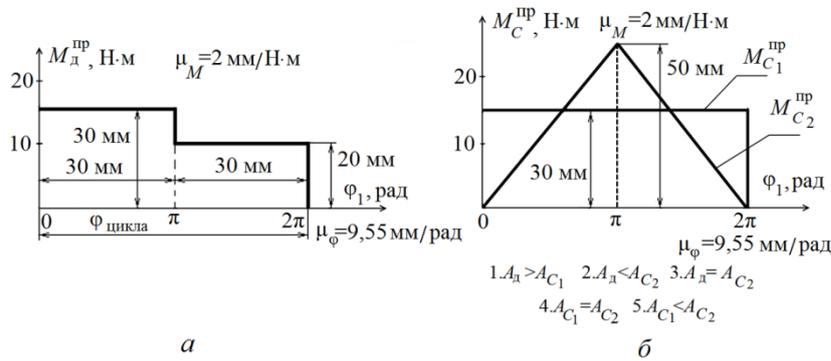


Рис. 26. Зависимости приведенного движущего момента и приведенных моментов сопротивления

ных моментов сопротивления $M_{C1}^{пр}$ и $M_{C2}^{пр}$ в зависимости от угла поворота звена приведения ϕ_1 некоторого механизма.

Укажите правильное соотношение между работами A_d , A_{C1} и A_{C2} этих моментов, совершаемыми за цикл.

Задача 8

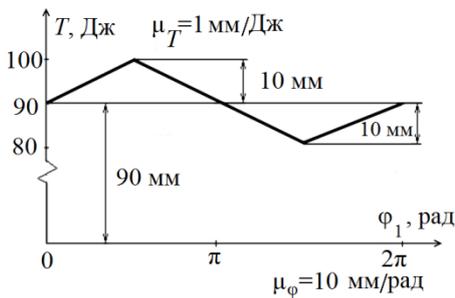


Рис. 27. Изменение кинетической энергии за цикл работы механизма

На рис. 27 представлена зависимость кинетической энергии $T(\phi_1)$ некоторого механизма от угла поворота звена приведения ϕ_1 за цикл установившегося режима движения. Определить коэффициент неравномерности движения δ , если средняя угловая скорость звена приведения $\omega_{ср} = 100$ рад/с и приведенный суммарный момент инерции $I_{\Sigma}^{пр} = 0,02$ кг·м².

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Б. И. Плужников, С. Е. Люминарский
«ДВИЖЕНИЕ МЕХАНИЗМОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРИЛОЖЕННЫХ СИЛ»

**Ответы на вопросы задач
для самостоятельного решения**

- Задача 1.** *Вопрос 1.* *Ответ:* $V_{S_2} = 0,707$ м/с.
 Вопрос 2. *Ответ:* $M_{\Sigma}^{np} = 15$ Н·м; $M_{F_3}^{np} = 0$.
 Вопрос 3. *Ответ:* $I_2^{np} = 0,015$ кг·м².
- Задача 2.** *Вопрос 1.* *Ответ:* $V_K = 0,5$ м/с.
 Вопрос 2. *Ответ:* $M_F^{np} = -5$ Н·м.
 Вопрос 3. *Ответ:* $I_3^{np} = 0,004$ кг·м².
- Задача 3.** *Вопрос 1.* *Ответ:* $V_D = 3$ м/с.
 Вопрос 2. *Ответ:* $M_{G_2}^{np} = -1,5$ Н·м.
 Вопрос 3. *Ответ:* $I_2^{np} = 0,045$ кг·м².
- Задача 4.** *Вопрос 1.* *Ответ:* $\omega_2 = 10$ рад/с.
 Вопрос 2. *Ответ:* $M_{C_3}^{np} = -10$ Н·м.
 Вопрос 3. *Ответ:* $I_{\Sigma}^{np} = 0,025$ кг·м².
- Задача 5.** *Вопрос 1.* *Ответ:* $V_D = 1$ м/с.
 Вопрос 2. *Ответ:* $M_{\Sigma}^{np} = -20$ Н·м.
 Вопрос 3. *Ответ:* $I_3^{np} = 0,02$ кг·м².
- Задача 6.** *Вопрос 1.* *Ответ:* $V_K = 2$ м/с.
 Вопрос 2. *Ответ:* $M_{FK}^{np} = -40$ Н·м.
 Вопрос 3. *Ответ:* $I_3^{np} = 0,03$ кг·м².
- Задача 7.** *Ответ:* Правильное соотношение $A_d = A_{C_2}$.
- Задача 8.** *Ответ:* $\delta = 0,1$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория механизмов и механика машин: Учеб. для вузов / Под ред. Г.А. Тимофеева. М.: Высш. шк., 2012. 686 с.
2. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1988. 640 с.
3. Теория механизмов и машин: Учеб. пособие / Г.А. Тимофеев, С.А. Попов, В.А. Никоноров и др.; Под ред. Г.А. Тимофеева. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 92 с.
4. Курс теоретической механики / Под ред. К.С. Колесникова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 736 с.
5. Движение механизмов под действием приложенных сил: Учеб. пособие для подготовки к рубежному контролю знаний по дисциплине «Теория механизмов и машин» / Б. И. Плужников, С. Е. Люминарский; под ред. Г. А. Тимофеева.-М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013. 46 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ